Über die Beschränktheit der Lösungen einer nichtlinearen Differentialgleichung dritter Ordnung

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Ahmed Abou El-Ela

aus Suez / V. A. R.

1970

Über die Beschränktheit der Lösungen einer nichtlinearen Differentialgleichung dritter Ordnung

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Ahmed Abou El-Ela

aus Suez / V. A. R.

1. Referent: Professor Dr. Pachale
2. Referent: Professor Dr. Rüßmann

Tag der mündlichen Prüfung: 4. Juni 1970

Tag der Promotion: 14. JULI 1970

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung 1

I. Umformung des Hauptproblems

1. Aufstellung eines äquivalenten Gleichungssystems 3

2. Die "Energiefunktion" W und ihre Eigenschaften 5

3. Fortsetzbarkeit auf $(0, +\infty)$ 9

4. Umformung des Beschränktheitsproblems 17

II. Die Modifikation der ebenen Kurve γ

5. Diskussion des Kurvenverlaufs 22

6. "Stückweise" Approximation von γ 27

7. Wahl von δ 33

III. Der eigentliche Beweis des umgeformten Problems

8. Einige Eigenschaften der "modifizierten" Kurve $\tilde{\gamma}$ 40

9. Abschätzung von $\tilde{W}_{s+1} - \tilde{W}_s$ 44

10. Beschränktheit von $\tilde{W}_s$ 45

Einige Bemerkungen 54

Literaturverzeichnis 59

Einleitung

In der folgenden Betrachtung soll die nichtlineare Differentialgleichung

$$(*) \quad \dddot{x} + a\ddot{x} + f_2(\dot{x}) + f_3(x) = p(t)$$

untersucht werden. Diese Differentialgleichung ist von J.O.C. EZEILO in spezieller Form ($f_2(\dot{x}) = b\dot{x}$) in [1] behandelt worden. In seiner Arbeit [2] untersuchte er die Differentialgleichung:

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = p(t) \ .$$

Es interessiert insbesondere das Verhalten der Lösungen x und ihrer ersten beiden Ableitungen für großes t. Es soll gezeigt werden, daß diese eine gemeinsame Schranke haben, falls f_2, f_3 und p gewissen Voraussetzungen genügen. Zu diesem Zweck wird (*) durch ein System von drei Differentialgleichungen erster Ordnung für die Funktionen ξ, η und ζ ersetzt. Man sieht dann, daß für die Gültigkeit der obigen Behauptung hinreichend ist, daß die ξ, η und ζ beschränkt sind (für großes t).

Beim Studium der Arbeit [2] wurde erkannt, daß an gewissen Stellen die Beweise noch einiger (wichtiger) Ergänzungen bedürfen. Diese wurden hier erbracht, und ihre Gültigkeit für die vorhandene Differentialgleichung gezeigt.

Eine wesentliche Rolle beim Beweis spielt eine in $\mathbb{R}^3$ erklärte Energiefunktion W, für deren Werte $\omega(t) := W(\xi(t),\eta(t),\zeta(t))$ längs einer Lösung $\{\xi(t),\eta(t),\zeta(t) \mid t \in I\}$ fundamentale Abschätzungen aufgestellt werden.

Es wird sich zeigen, daß bereits die Beschränktheit der ebenen Kurve $\gamma := \{(\xi(t),\eta(t)) \mid t \geq t_0\}$ ausreichend ist. Daher wird ein passendes Quadrat Σ eingeführt und das Verhalten der im Innern und im Äußeren von Σ verlaufenden Teile gesondert betrachtet.

Da die Kurve auf den horizontalen Kanten "oszillieren" - oder "gerade" verlaufen - kann (wenn nicht für die Störfunktion p einschränkende Voraussetzungen gemacht werden), erwies es sich als erforderlich, gewisse "pathologische" Kurvenstücke

durch gerade Strecken zu ersetzen. Auf den vertikalen Kanten benötigt man auch eine solche Modifikation, da sich die Kurve um die Mitte jeder Kante unendlich oft winden kann. Diese "Ersetzungen" werden aber so vorgenommen, daß die fundamentalen Abschätzungen auch für die durch Modifikation entstehende Funktion $\tilde{\omega}$ erhalten bleiben.

Man zeigt schließlich, daß $\tilde{\omega}$, gebildet für die durch die Ersetzungen erhaltene modifizierte Kurve $\tilde{\gamma}$ für großes t auf $\tilde{\gamma} \cap \Sigma$, beschränkt bleibt. Hieraus ergibt sich dann (aus dem Verhalten von $W(x,y,z)$ für $x^2 + y^2 + z^2 \to \infty$) die Beschränktheit von $\tilde{\gamma}$ und hieraus offensichtlich die der ursprünglichen Kurve γ, was zu zeigen war.

Die Differentialgleichung (*) ist bei EZEILO [3] mit ähnlichen Voraussetzungen untersucht worden, aber mit dem Unterschied, daß die Störfunktion p selbst und nicht ihr Integral beschränkt war. Die Untersuchungsmethoden sind ähnlich denen in [2]. In [3] wurde die Beschränktheit der Projektion der Raumkurve in der (y,z)-Ebene gezeigt, woraus dann die Beschränktheit der Raumkurve bewiesen wurde, was äquivalent zur Behauptung war. Der Beweis beruhte auf der Annahme, daß sich die Schnittpunkte der Kurve mit dem Quadrat nicht im Endlichen häufen können.

Auf einen Hinweis des Verfassers hat EZEILO in [4] gezeigt, daß in [2] noch eine zusätzliche Voraussetzung benötigt wird, nämlich auch die Beschränktheit von p, damit die obige "pathologische" Situation nicht eintreten kann. Die benötigten Methoden stützen sich ganz auf Resultate und Beweisverfahren aus der klassischen Analysis und der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Herrn Prof.Dr. H. PACHALE bin ich sehr dankbar für die Anregung zu dieser Arbeit. Herrn Prof.Dr.H.Rüßmann (Imp.College) und Prof.Dr. J.Ezeilo (University of Nigeria) danke ich für mehrere Hinweise. Herrn Dr. K.-H.Förster danke ich für die Hilfe bei der Abfassung des Manuskriptes in deutscher Sprache und für mehrere wertvolle Bemerkungen.

KAPITEL I Umformung des Hauptproblems

§ 1 Formulierung des Hauptsatzes über die Beschränktheit der Lösungen und die Aufstellung eines äquivalenten Gleichungssystems

a) Formulierung des Beschränktheitssatzes

Es sei a eine reelle positive Konstante, f_2 und f_3 seien reellwertige auf der ganzen reellen Achse definierte Funktionen, und es sei p eine reellwertige Funktion, die für alle nichtnegativen reellen Zahlen definiert ist.

f_3 sei differenzierbar. f_2, f_3' und p seien stetig.

Ferner seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

(i) $f_2(0) = 0 = f_3(0)$

(ii) Es existieren positive Konstanten δ_2, δ_3' mit:
$a\delta_2 - \delta_3' > a\delta_2^{-1}$, so daß
$f_2(y)/y \geq \delta_2 (y \neq 0)$ und $f_3'(x) \geq \delta_3' < \frac{1}{2}a$ für alle x.

(iii) Es existieren positive Konstanten δ_3, δ_2' mit:
$\delta_2' - \delta_3 < \delta_2$, so daß
$f_3(x) / x \geq \delta_3 (x \neq 0)$ und $f_2(y)/y \leq \delta_2' (y \neq 0)$.

(iv) Es existiert eine Konstante A_0, so daß für alle $t \geq 0$ gilt:
$| P(t) | \leq A_0$, wobei $P(t) := \int_0^t p(\tau) d\tau$.

Unter diesen Voraussetzungen existieren positive Konstanten $\mathfrak{k}$ und D, so daß für jede Lösung von

$$(*) \quad \dddot{x}(t) + a\ddot{x}(t) + f_2(\dot{x}(t)) + f_3(x(t)) = p(t)$$

gilt: $| x(t) | \leq D$, $| \dot{x}(t) | \leq D$ und $| \ddot{x}(t) | \leq D$ für alle $t \geq \mathfrak{k}$.

b) Aufstellung des äquivalenten Gleichungssystems

I. Es sei ξ eine auf (einem gewissen) Intervall I existierende Lösung von (*).

Wir definieren:

$$(1.1) \quad \eta(t) = \dot{\xi}(t)$$
$$(1.2) \quad \zeta(t) = \dot{\eta}(t) + a\eta(t) - P(t) \qquad \text{für } t \in I$$

Da ξ dreimal differenzierbar ist (als Lösung von (*)), so ist wegen (1) η zweimal differenzierbar. Da p stetig ist, so ist nach (iv) P differenzierbar. Aus (2) folgt dann, daß auch ζ differenzierbar ist, und daß

$$(1.3) \quad \dot{\zeta}(t) = \ddot{\eta}(t) + a\,\dot{\eta}(t) - p(t) \quad \text{für } t \in I \text{ gilt.}$$

Wegen (1) und (*) gilt dann:

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t) &= \dddot{\xi}(t) + a\,\ddot{\xi}(t) - p(t)\\ &= -f_2(\dot{\xi}(t)) - f_3(\xi(t)) \quad \text{für } t \in I\,.\end{aligned}$$

Damit genügt (ξ,η,ζ) auf I dem Differentialgleichungssystem:

$$(**) \qquad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z - ay + P \\ \dot{z} = -f_2(y) - f_3(x)\,. \end{cases}$$

II. Es sei nun umgekehrt (ξ,η,ζ) - auf einem Intervall I - eine Lösung von (**).
Dann gilt:

$$\left.\begin{aligned} &(1.4) \quad \dot{\xi}(t) = \eta(t) \\ &(1.5) \quad \dot{\eta}(t) = \zeta(t) - a\,\eta(t) + P(t) \\ &(1.6) \quad \dot{\zeta}(t) = -f_2(\eta(t)) - f_3(\xi(t)) \end{aligned}\right\} \text{für } t \in I\,.$$

Da $P(t)$ $(= p(t))$ für $t \in I$ existiert, folgt aus (5) / (6), daß auch $\ddot{\eta}(t)$ für $t \in I$ existiert. Dann existiert nach (4) auch $\dddot{\xi}(t)$ für $t \in I$, und

$$\begin{aligned}\dddot{\xi}(t) &= \ddot{\eta}(t)\\ &= \dot{\zeta}(t) - a\,\dot{\eta}(t) + p(t)\\ &= -f_2(\dot{\xi}(t)) - f_3(\xi(t)) - a\,\ddot{\xi}(t) + p(t)\,.\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\dddot{\xi}(t) + a\,\ddot{\xi}(t) + f_2(\dot{\xi}(t)) + f_3(\xi(t)) = p(t) \quad \text{für } t \in I\,.$$

D.h. die erste Komponente ξ des Tripels (ξ,η,ζ) genügt auf I der Ausgangsdifferentialgleichung (*).

Mithin folgt, daß (*) und (**) äquivalent sind, und überdies die den sich entsprechenden Lösungen zugehörigen Definitionsbereiche übereinstimmen.

§ 2 Die "Energiefunktion" des Problems und ihre Eigenschaften

I. Einführung der auf $\mathbb{R}^3$ erklärten Funktion W.

Definition von W:

$$(2.1)\quad 2\,W(x,y,z) := \delta_2' x^2 + 4ab \int_0^x f_3(\xi)\,d\xi - y^2 + 4b \int_0^y f_2(\eta)\,d\eta + \\ + 2\,bz^2 + 2\,xz + 4b\,f_3(x)y$$

für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

(Man beachte, daß wegen der Voraussetzungen über f_2 und f_3 die Integrale existieren und stetig differenzierbare Funktionen in y und x sind.)
Ferner sei dabei $b \neq 1$ so gewählt (fest!), daß

$$(2.2)\quad \frac{a}{a\delta_2 - \delta_3'} < b < \delta_2$$

gilt, was wegen der Voraussetzungen $a > 0$ und $a\delta_2 - \delta_3' > a\delta_2^{-1}$ möglich ist; denn es ergibt sich $a\delta_2 > a\delta_2 - \delta_3' > a\delta_2^{-1}$ und damit $\delta_2 > 1$.

II. Die folgenden zwei Lemmata beschreiben wichtige Eigenschaften von W.

Lemma 1:

Es gelten:

$$(2.3)\quad W(x,y,z) \geq 0 \quad \text{für} \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$(2.4)\quad \lim_{x^2+y^2+z^2 \to \infty} W(x,y,z) = +\infty .$$

Beweis:

$$2\,W(x,y,z) = \delta_2' x^2 + 4ab \int_0^x f_3(\xi)\,d\xi - y^2 + 4b \int_0^y f_2(\eta)\,d\eta +$$

$$+ 2\,bz^2 + 2\,xz + 4\,b\,f_3(x)y \geq$$

$$2\,W(x,y,z) \geq \left(\tfrac{1}{b}\,x^2 + 2xz + bz^2\right) + bz^2 + \left(b^2y^2 + 4b\,f_3(x)y + 4\,f_3^2(x)\right) + \left\{4b\int_0^y f_2(\eta)\,d\eta - (1+b^2)y^2\right\} + \left\{4ab\int_0^x f_3(\xi)\,d\xi - 4\,f_3^2(x)\right\}$$

$$2\,W(x,y,z) \geq \tfrac{1}{b}(x+bz)^2 + bz^2 + (by + 2\,f_3(x))^2 + 2\int_0^y \{2b\,f_2(\eta) - (1+b^2)\,\eta\}\,d\eta + 4\int_0^x \{ab - 2\,f_3'(\xi)\}\,f_3(\xi)\,d\xi$$

Da $ab - 2\,f_3'(\xi) \geq ab - 2\,\delta_3'$

$$\geq a - 2\,\delta_3' > 0 \qquad (b \geq 1,\ 2\,\delta_3' < a)$$

Fall α) $xy \neq 0$:

$$2\,W(x,y,z) \geq \tfrac{1}{b}(x+bz)^2 + bz^2 + (by + 2\,f_3(x))^2 + 2\int_0^y \{2b\,\delta_2 - (1+b^2)\}\,\eta\,d\eta + 4\int_0^x \{a - 2\,\delta_3'\}\,\delta_3\xi\,d\xi$$

$$= \tfrac{1}{b}(x+bz)^2 + bz^2 + (by + 2\,f_3(x))^2 + (2b\,\delta_2 - 1 - b^2)y^2 + 2(a - 2\,\delta_3')\,\delta_3\,x^2.$$

Da $\delta_2 > b \geq 1 > \frac{1}{b}$, dann $2\,\delta_2 > b + \frac{1}{b}$

und $2b\,\delta_2 - 1 - b^2 > 0$.

Wegen $a - 2\,\delta_3' > 0$, gilt dann:

$$W(x,y,z) \geq 0 \quad \text{wenn} \quad xy \neq 0$$

Fall β) $xy = 0$:

Dann gilt trivialerweise nach Definition von W und (**), daß W nicht negativ ist.

Aus α) und β) folgt:

$$W(x,y,z) \geq 0 \quad \text{für alle} \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

$\lim_{x^2+y^2+z^2 \to \infty} W(x,y,z) = +\infty$ folgt leicht aus

$$2W(x,y,z) \geq \frac{1}{b}(x + bz)^2 + bz^2 + (by + 2 f_3(x))^2 + (2b\,\delta_2 - 1 - b^2)y^2 + 2(ab - 2\delta_3')\delta_3 x^2 .$$

Definition von ω:

Ist (ξ,η,ζ) eine auf einem Intervall I definierte Lösung von (**), dann sei

(2.5) $\quad \omega(t) := W(\xi(t),\eta(t),\zeta(t)) \quad$ für $t \in I$.

Lemma 2:

Es existieren positive Konstanten D_0, D_1, D_2 und D_3 mit:

(2.6) $\quad \dot{\omega}(t) \leq - D_0(\xi^2(t) + \eta^2(t)) + D_1(|\xi(t)| + |\eta(t)|)$ für $t \in I$

(2.7) $\quad \omega(t) \leq - D_2(\xi^2(t) + \eta^2(t)) < 0$ für $t \in I \cap \{\tau \mid \max(|\xi(\tau)|, |\eta(\tau)| \geq D_3\}$.

Beweis:

$$2w(x,y,z) = \delta_2' x^2 + 4ab \int_0^x f_3(\xi)d\xi - y^2 + 4b \int_0^y f_2(\eta)d\eta + 2bz^2 + 2xz + 4b\, f_3(x)y$$

$$\dot{\omega} = \frac{\partial w}{\partial \xi}\dot{\xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta}\dot{\eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta}\dot{\zeta}$$

$$= \{\delta_2' \xi + 2ab\, f_3(\xi) + \zeta + 2b\, f_3'(\xi)\eta\}\,\eta$$

$$+ \{-\eta + 2b\, f_2(\eta) + 2b\, f_3(\xi)\} \cdot \{\zeta - a\eta + P\}$$

$$+ \{2b\,\zeta + \xi\} \cdot \{- f_2(\eta) - f_3(\xi)\}$$

$$\dot{\omega} = \delta_2' \xi\eta + 2\,ab\, f_3(\xi)\eta + \eta\zeta + 2\,b\, f_3'(\xi)\eta^2$$
$$- \eta\zeta + a\eta^2 - \eta P + 2\,b\, f_2(\eta)\zeta - 2\,ab\, f_2(\eta)\eta + 2\,b\, f_2(\eta)\, P$$
$$+ 2\,b\, f_3(\xi)\zeta - 2\,ab\, f_3(\xi)\eta + 2\,b\, f_3(\xi)\, P$$
$$- 2\,b\, f_2(\eta)\zeta - 2\,b\, f_3(\xi)\zeta - f_2(\eta)\xi - f_3(\xi)\xi$$
$$\leq \delta_2' \xi\eta - f_2(\eta)\xi + 2\,b\,\delta_3'\,\eta^2 + a\eta^2 - 2\,ab\, f_2(\eta)\eta - f_3(\xi)\xi$$
$$+ (2\,b\, f_2(\eta) - \eta + 2\,b\, f_3(\xi))\, P$$

Fallunterscheidung:

α) Es sei $\xi\eta \leq 0$:

Wenn $\xi\eta = 0 \curvearrowright \delta_2' \xi\eta - f_2(\eta)\,\xi = 0$.

Wenn $\xi\eta < 0 \curvearrowright \delta_2' \xi\eta - f_2(\eta)\,\xi = \xi\eta(\delta_2' - \frac{f_2(\eta)}{\eta})$

$$\leq \xi\eta(\delta_2' - \delta_2') = 0 .$$

Dann folgt:

$$\dot{\omega} \leq 2\,b\,\delta_3'\,\eta^2 + a\,\eta^2 - 2\,ab\,\delta_2\,\eta^2 - \delta_3\,\xi^2$$
$$+ (2\,b\,\delta_2'\,|\eta| + |\eta| + 2\,b\,\delta_3'\,|\xi|)\,A_0$$

(beachte $|f_3(\xi)| \leq \delta_3'\,|\xi|$ folgt aus $f_3'(\xi) \leq \delta_3'$, $f_3(0) = 0$ und $f_3(\xi)/\xi > 0$)

$$\leq - (2\,ab\,\delta_2 - 2\,b\,\delta_3' - 2\,a)\eta^2 - \tfrac{1}{2}\,\delta_3\,\xi^2 +$$
$$+ (2\,b\,\delta_2'\,|\eta| + |\eta| + 2\,b\,\delta_3'\,|\xi|)\,A_0$$

Aus $b(a\,\delta_2 - \delta_3') > a$ folgt $2\,ab\,\delta_2 - 2\,b\,\delta_3' - 2\,a > 0$.

Sind D_0 und D_1 positive Zahlen mit den Eigenschaften:

$D_0 \leq \min(2\,ab\,\delta_2 - 2\,b\,\delta_3' - 2\,a;\ \frac{1}{2}\,\delta_3)$ und

$D_1 \geq \max(2\,b\,\delta_2' + 1;\ 2\,b\,\delta_3')\,A_0$, so gilt (2.6) .

β) Es sei $\xi\eta > 0$:

$$\delta_2' \xi\eta - f_2(\eta)\,\xi = (\delta_2' - \frac{f_2(\eta)}{\eta})\xi\eta$$
$$\leq (\delta_2' - \delta_2)\,\xi\eta < \delta_3 \cdot \tfrac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)$$
$$< \frac{\delta_3}{2}\,\xi^2 + a\,\eta^2 .$$

Dann folgt:

$$\dot{\omega} < -(2\,ab\,\delta_2 - 2\,b\,\delta_3' - 2\,a)\,\eta^2 - \frac{\delta_3}{2}\,\xi^2 + $$
$$+(2\,b\delta_2'\,|\eta| + |\eta| + 2\,b\,\delta_3'\,|\xi|)\,A_o\,.$$

Nach der Definition von D_o und D_1 gilt nun (2.6).

Aus α) und β) folgt:

$$\dot{\omega}(t) \leq -D_o(\xi^2(t) + \eta^2(t)) + D_1\,(|\xi(t)| + |\eta(t)|) \quad \text{für } t \in I\,.$$

Sei $\max\{|\xi(t)|, |\eta(t)|\} \geq 4\,D_1/D_o$,

also $D_1 \leq \frac{1}{4}\,D_o \max\{|\xi(t)|, |\eta(t)|\}$, dann folgt:

$$\dot{\omega}(t) \leq -D_o(\xi^2(t) + \eta^2(t)) + \frac{1}{4}\,D_o \max\{|\xi(t)|, |\eta(t)|\}\cdot$$
$$\cdot\{|\xi(t)| + |\eta(t)|\}$$
$$\leq -D_o(\xi^2(t) + \eta^2(t)) + \frac{1}{2}\,D_o \max^2\{|\xi(t)|, |\eta(t)|\}$$
$$= -D_o(\xi^2(t) + \eta^2(t)) + \frac{D_o}{2} \max\{\xi^2(t), \eta^2(t)\}$$
$$\leq -D_o(\xi^2(t) + \eta^2(t)) + \frac{D_o}{2}\,(\xi^2(t) + \eta^2(t))$$
$$= -\frac{D_o}{2}\,(\xi^2(t) + \eta^2(t))$$

Setze: $D_2 = D_o/2$ und $D_3 = 4\,D_1/D_o$,

dann gilt (2.7)

$$\dot{\omega}(t) \leq -D_2(\xi^2(t) + \eta^2(t)) < 0$$
$$\text{für } t \in I \cap \{\tau | \max\{|\xi(\tau)|; |\eta(\tau)|\} \geq D_3\}\,.$$

§ 3 Die Fortsetzbarkeit der Lösungen auf $(0, +\infty)$

Wir beweisen, daß jede auf einem Intervall $I \neq (0, +\infty)$ existierende Lösung von (*) auf ganz $(0, +\infty)$ fortgesetzt werden kann.

(Bemerkung: Davon wird bereits in der Formulierung unseres Hauptsatzes Gebrauch gemacht).

I. Existenz eines Maximaldefinitionsbereiches der Lösungen

a) Es sei ξ_o eine auf $I_o = (\alpha_o, \beta_o) \neq (0, +\infty)$ definierte Lösung. Man beachte jetzt die Menge $\mathfrak{L}$ aller Funktionen ξ mit folgenden Eigenschaften:

1.) Es existiert ein (offenes) Intervall I mit $I \supset I_o$, und ξ ist auf I definiert und dort dreimal stetig differenzierbar.

2.) ξ ist auf I Lösung von (*) .

3.) Für $t \in I_o$ gilt: $\xi(t) = \xi_o(t)$.

D.h.: $\mathfrak{L}$ ist die Menge derjenigen Lösungen von (*), welche eine Forsetzung von ξ_o sind .

b) Definition einer Halbordnung in $\mathfrak{L}$:

$\xi_1 \in \mathfrak{L}$ $(i = 1,2) \curvearrowright$

$\xi_1 \prec \xi_2 \overset{\text{def}}{\curvearrowright}$ $\mathrm{Def}(\xi_1) \subseteq \mathrm{Def}(\xi_2)$ und

$\forall t (t \in \mathrm{Def}(\xi) \curvearrowright \xi_2(t) = \xi_1(t))$

Offenbar stellt "$\prec$" eine Halbordnung in $\mathfrak{L}$ dar, d.h. "$\prec$" ist transitiv, reflexiv und antisymmetrisch.

c) Beweis, daß $\mathfrak{L}$ eine induktiv geordnete Menge ist:

Es sei $\mathfrak{D}$ eine beliebige Kette aus $\mathfrak{L}$, also

(3.1) $\quad \mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{L}$

Wir bezeichnen kurz:

(3.2) $\quad I_\xi := \mathrm{Def}(\xi)$ (= offenes Intervall),

und setzen:

(3.3) $\quad I_{\mathfrak{D}} := \bigcup_{\xi \in \mathfrak{D}} I_\xi$

Offenbar ist $I_{\mathfrak{D}}$ (als Vereinigung offener Intervalle) offen. Wegen $I_\xi \supseteq I_o$ folgt, daß mit $t_i \in I_{\mathfrak{D}}$ $(i = 1,2)$ auch die ganze Strecke $\overline{t_1 t_2}$ noch zu $I_{\mathfrak{D}}$ gehört. Also ist $I_{\mathfrak{D}}$ auch zusammenhängend. Mithin ist $I_{\mathfrak{D}}$ ein Intervall.
Wir definieren $\xi_{\mathfrak{D}}$ durch

(3.4) $\quad \xi_{\mathfrak{D}}(t) := \xi(t)$ für $t \in I_{\mathfrak{D}}$ falls $t \in I_\xi$.

(Bemerkung: Diese Definition ist konsistent. Denn gilt

$t \in I_{\xi_i}$ $(i = 1,2)$, so ist etwa $\xi_1 < \xi_2$, weil $\mathfrak{O}$ linear geordnet ist und daher $\xi_1 \in \mathfrak{O}$ vergleichbar sind. Nach der Definition in b) folgt dann, daß $\xi_2(t) = \xi_1(t)$).
Also ist $\xi_{\mathfrak{O}}$ eine auf dem offenen Intervall $I_{\mathfrak{O}}$ erklärte Funktion.

Ist $t_o \in I_{\mathfrak{O}}$, dann gibt es nach (3.3) ein ξ_o aus $\mathfrak{O}$, so daß $t_o \in I_{\xi_o}$.
Nun ist aber ξ_o auf I_{ξ_o} dreimal stetig differenzierbar und genügt (*).
Nach (3.4) gilt aber speziell:

$$\xi_{\mathfrak{O}}(t) = \xi_o(t) \quad \text{für} \quad t \in I_{\xi_o}.$$

D.h. aber : $\xi_{\mathfrak{O}}$ ist auf I_{ξ_o} dreimal stetig differenzierbar und genügt (*).
Damit ist bewiesen : $\xi_{\mathfrak{O}}$ ist dreimal stetig differenzierbar und genügt (*).

Ferner folgt noch aus der Definition von $\mathfrak{L}$, daß:

$$I_{\mathfrak{O}} \supseteq I_o$$

Also gehört $\xi_{\mathfrak{O}}$ zu $\mathfrak{L}$.

Aus (3.3) folgt unmittelbar:

(3.5) $I_{\mathfrak{O}} \supseteq I_\xi$ für $\xi \in \mathfrak{O}$

Aus (3.4) folgt

(3.6) $\xi_{\mathfrak{O}}|_{I_\xi} = \xi$.

Damit gilt nach (3.5)/(3.6) und der Definition von "<"

$$\xi < \xi_{\mathfrak{O}} \quad \text{für} \quad \xi \in \mathfrak{O},$$

d.h. $\xi_{\mathfrak{O}}$ ist eine obere Schranke von $\mathfrak{O}$.

Da $\mathfrak{O}$ beliebige Kette aus $\mathfrak{L}$ war, ist $\mathfrak{L}$ induktiv geordnet.

d) Nach dem ZORN'schen Lemma existiert daher ein maximales Element in $\mathfrak{L}$, d.h. es existiert ein offenes Intervall $\hat{I}$ und eine darauf erklärte Funktion $\hat{\xi}$ mit folgenden Eigenschaften:

(3.7) $I_o \subset \hat{I}$

(3.8) $\hat{\xi}(t) = \xi_o(t)$ für $t \in I_o$

(3.9) $\hat{\xi}$ ist auf $\hat{I}$ dreimal stetig differenzierbar und genügt dort (*)

(3.10) Es gibt keine auf einem das Intervall $\hat{I}$ echt umfassenden Intervall $\tilde{I}$ definierte Funktion $\tilde{\xi}$ mit:

(3.$\tilde{8}$) $\tilde{\xi}(t) = \hat{\xi}(t)$ für $t \in \hat{I}$

(3.$\tilde{9}$) $\tilde{\xi}$ ist auf $\tilde{I}$ dreimal stetig differenzierbar und genügt dort (*) .

II. Die Fortsetzbarkeit auf $(0, +\infty)$

Auf Grund von d) werden wir zeigen, daß $\hat{I} = (0, +\infty)$ sein muß. Es sei also $\hat{I} = (\alpha, \beta)$ mit $\alpha \geq 0$ und o.B.d.A. $\beta < +\infty$.
a) Wir werden zeigen, daß $\hat{\xi}$ über β hinaus fortsetzbar ist, was sich dann unmittelbar als Widerspruch zur Maximalität von $\hat{I}$ ergibt. Wegen der Äquivalenz von (*) und (**) ist die Aussage gleichwertig, daß das der Funktion $\hat{\xi}$ entsprechende Lösungstripel $(\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta})$ über β hinaus forsetzbar ist. Der Einfachheit halber schreiben wir jetzt nur (ξ, η, ζ).

Auf Grund der Theorie der (Systeme von) Differentialgleichungen ist hierzu bei unserem System (**) hinreichend zu zeigen, daß

(3.11) $\lim\limits_{\substack{t \to \beta \\ t < \beta}} \xi(t)$

(3.12) $\lim\limits_{\substack{t \to \beta \\ t < \beta}} \eta(t)$

(3.13) $\lim\limits_{\substack{t \to \beta \\ t < \beta}} \zeta(t)$ existieren.

b) Wir zeigen zunächst, daß für festes $t_o (\alpha < t_o < \beta)$ ein $\varkappa$, $\varkappa > 0$ existiert mit der Eigenschaft:

(3.14) $\xi^2(t) + \eta^2(t) + \zeta^2(t) \leq \varkappa^2$, $\quad t_o \leq t < \beta$.

Dazu definieren wir für $t \in [t_o, \beta)$

(3.15) $M_t := \{\tau \mid t_o \leq \tau \leq t \ , \ \max(|\xi(\tau)|, |\eta(\tau)|) \geq D_3\}$

M_t ist meßbar wegen der Stetigkeit von ξ und η .
Wegen Lemma 2 gilt nun:

$$(\widetilde{2.7}) \qquad \dot{\omega}(\tau) \leq - D_0(\xi^2(\tau) + \eta^2(\tau)) + D_1(|\xi(\tau)| + |\eta(\tau)|)$$
$$\text{für } \tau \in [t_0,t] \setminus M_t$$

$$(\widetilde{2.8}) \qquad \dot{\omega}(\tau) \leq - D_2(\xi^2(\tau) + \eta^2(\tau)) \quad (< 0) \quad \text{für } \tau \in M_t .$$

Mithin wird (LEBESGUE'sche Integrationstheorie)

$$(3.16) \qquad \omega(t) - \omega(t_0) = \int_{t_0}^{t} \dot{\omega}(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{[t_0,t]\setminus M_t} \dot{\omega}(\tau)\, d\tau + \int_{M_t} \dot{\omega}(\tau)\, d\tau$$

$$\leq - D_0 \int_{[t_0,t]\setminus M_t} (\xi^2(\tau) + \eta^2(\tau))\, d\tau +$$

$$+ D_1 \int_{[t_0,t]\setminus M_t} (|\xi(\tau)| + |\eta(\tau)|)\, d\tau$$

$$- D_2 \int_{M_t} (\xi^2(\tau) + \eta^2(\tau))\, d\tau$$

$$\leq D_1 \int_{[t_0,t]\setminus M_t} (|\xi(\tau)| + |\eta(\tau)|)\, d\tau$$

$$\leq D_1 \int_{[t_0,t]\setminus M_t} (D_3 + D_3)\, d\tau$$

$$= 2 D_1 D_3 \int_{[t_0,t]\setminus M_t} d\tau$$

$$\leq 2 D_1 D_3 \int_{[t_0,t]} d\tau$$

$$\leq 2 D_1 D_3 \int_{t_0}^{\beta} d\tau$$

$$= 2 D_1 D_3 (\beta - t_0) := \tilde{\varkappa}$$

Also: $\omega(t) - \omega(t_0) \leq \tilde{\varkappa} \qquad t_0 \leq t < \beta$.

Wegen Lemma 1 (2.3) und der Definition von ω gilt:

$$\omega(t) \geq 0 \quad \text{für alle} \quad t \in I .$$

Somit folgt:

$$(3.17) \qquad 0 \leq \omega(t) \leq \omega(t_o) + \tilde{\varkappa}, \qquad t_o \leq t < \beta .$$

Lemma 1 (2.4) besagt: $\omega(t) \to \infty$, wenn $\xi^2(t) + \eta^2(t) + \zeta^2(t) \to \infty$.

Nach (3.17) folgt dann unmittelbar die Existenz einer Konstante $\varkappa$, so daß (3.14) gilt.

c) Aus (3.14) ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} (3.11)_1 \qquad & |\xi(t)| \leq \varkappa, \\ (3.12)_1 \qquad & |\eta(t)| \leq \varkappa, \\ (3.13)_1 \qquad & |\zeta(t)| \leq \varkappa \end{aligned}\right\} \quad \text{wobei} \quad t_o \leq t < \beta .$$

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} (3.11)_2 \qquad & -\infty < \underline{\lim_{t\to\beta}}\, \xi(t) \leq \overline{\lim_{t\to\beta}}\, \xi(t) < +\infty \\ (3.12)_2 \qquad & -\infty < \underline{\lim_{t\to\beta}}\, \eta(t) \leq \overline{\lim_{t\to\beta}}\, \eta(t) < +\infty \\ (3.13)_2 \qquad & -\infty < \underline{\lim_{t\to\beta}}\, \zeta(t) \leq \overline{\lim_{t\to\beta}}\, \zeta(t) < +\infty \end{aligned}\right\} \text{wobei } t_o \leq t < \beta .$$

Wir zeigen jetzt, daß

$$\left.\begin{aligned} (3.11)_3 \qquad & \underline{\xi} := \underline{\lim_{t\to\beta}}\, \xi(t) = \overline{\lim_{t\to\beta}}\, \xi(t) =: \bar{\xi} \\ (3.12)_3 \qquad & \underline{\eta} := \underline{\lim_{t\to\beta}}\, \eta(t) = \overline{\lim_{t\to\beta}}\, \eta(t) =: \bar{\eta} \\ (3.13)_3 \qquad & \underline{\zeta} := \underline{\lim_{t\to\beta}}\, \zeta(t) = \overline{\lim_{t\to\beta}}\, \zeta(t) =: \bar{\zeta} \end{aligned}\right\} \text{wobei } t_o \leq t < \beta .$$

α) Beweis für:

$$\underline{\xi} = \bar{\xi}$$

Nach Definition von $\underline{\xi}$ und $\bar{\xi}$ existieren Folgen $((\underline{t}_\nu))$ und $((\bar{t}_\nu))$ mit

$$(3.18) \qquad \underline{t}_\nu \to \beta , \quad \underline{t}_\nu < \beta \quad \text{und} \quad \lim_{\nu\to\infty} \xi(\underline{t}_\nu) = \underline{\xi} ,$$

$$(3.19) \qquad \bar{t}_\nu \to \beta , \quad \bar{t}_\nu < \beta \quad \text{und} \quad \lim_{\nu\to\infty} \xi(\bar{t}_\nu) = \bar{\xi} .$$

Durch passende Auswahl (man wähle jeweils das kleinste nachfolgende Element der anderen Folge) und durch Umbenennung der Indizes erreicht man

$$(3.20) \qquad \bar{t}_1 < \underline{t}_1 < \bar{t}_2 < \underline{t}_2 < \dots < \bar{t}_\nu < \underline{t}_\nu < \dots$$

Wir nehmen nun

$$(3.21) \qquad \theta := \bar{\xi} - \underline{\xi} > 0 \quad \text{an.}$$

Wegen (3.18)/(3.19) existiert ein n, so daß

$$\left.\begin{aligned} (3.22) \qquad & \xi(\bar{t}_\nu) \geq \bar{\xi} - \frac{\theta}{3} \\ (3.23) \qquad & \xi(\underline{t}_\nu) < \underline{\xi} + \frac{\theta}{3} \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad \nu \geq n$$

gilt.
Mithin wird

$$\xi(\bar{t}_\nu) - \xi(\underline{t}_\nu) \geq \frac{\theta}{3} \qquad \text{für} \quad \nu \geq n ,$$

also

$$\left| \frac{\xi(\bar{t}_\nu) - \xi(\underline{t}_\nu)}{\bar{t}_\nu - \underline{t}_\nu} \right| \geq \frac{\theta}{3\,|\bar{t}_\nu - \underline{t}_\nu|} .$$

Nach dem Mittelwertsatz existiert nun für jedes ν ein τ_ν mit

$$\frac{\xi(\bar{t}_\nu) - \xi(\underline{t}_\nu)}{\bar{t}_\nu - \underline{t}_\nu} = \dot{\xi}(\tau_\nu) ,$$

$$t_o \leq \bar{t}_\nu < \tau_\nu < \underline{t}_\nu < \beta .$$

Somit folgt

$$|\dot{\xi}(\tau_\nu)| \geq \frac{\theta}{3\,|\bar{t}_\nu - \underline{t}_\nu|} \qquad \text{für} \quad \nu \geq n .$$

Wegen (**) gilt speziell:

$$\dot{\xi}(t) = \eta(t) \qquad \text{für} \quad t \in \hat{I} ,$$

also gilt:

$$|\eta(t)| \geq \frac{\theta}{3\,|\bar{t}_\nu - \underline{t}_\nu|} \qquad \text{für} \quad \nu \geq n .$$

Wegen (3.18)/(3.19) ergibt sich

$$(3.24) \qquad \lim_{\nu \to \infty} |\eta(\tau_\nu)| = +\infty ,$$

also ein Widerspruch zu $(3.12)_1$ wegen $t_o < \tau_\nu < \beta$.

β) Wäre jetzt

$$\bar{\eta} > \underline{\eta}$$

so folgte in Analogie zu α)

(3.25) $$\sup_{t_o \le t < \beta} |\dot{\eta}(t)| = + \infty .$$

Aber nach (**) gilt:

$$\dot{\eta}(t) \leqq \zeta(t) - a\eta(t) + P(t) \qquad \text{für} \quad t \in \hat{I} .$$

Wegen $(3.12)_1/(3.13)_1$ und (iii) ergibt sich

(3.26) $$|\dot{\eta}(t)| \le \hat{\varkappa} < + \infty$$

in Widerspruch zu (3.25).

γ) Schließlich sei

$$\bar{\zeta} > \underline{\zeta}$$

so führt die Annahme in Analogie zu α) zu

(3.27) $$\sup_{t_o \le t < \beta} |\dot{\zeta}(t)| = + \infty .$$

Aber aus (**) ergibt sich die Identität:

$$\dot{\zeta}(t) \leqq - f_2(\eta(t)) - f_3(\xi(t)) \qquad \text{für} \quad t \in \hat{I} .$$

Nach (ii) und (iii) gilt

$$\dot{\zeta}(t) < - \delta_2 \eta(t) - \delta_3 \xi(t) \qquad \text{für} \quad t \in \hat{I} .$$

Aus $(3.12)_1/(3.11)_1$ folgt aber die Beschränktheit von

$\dot{\zeta}(t)$ im Widerspruch zu (3.27) .

d) Nach der Bemerkung a) ist also (ξ,η,ζ) über $\hat{I}$ hinaus fortsetzbar, was der Maximalität von $\hat{I}$ widerspricht.

Also ist die Annahme $\beta < + \infty$ falsch, und es gilt $\beta = + \infty$.

Analog zeigt man, daß $\alpha = 0$ sein muß.

Also ist $\hat{I} = (0, + \infty)$, und damit die Fortsetzbarkeit bewiesen.

§ 4 Umformung des Beschränktheitsproblems

Es sei nun (ξ,η,ζ) eine - auf ganz $(0, +\infty)$ definierte - Lösung von (**).
Wir definieren für ein (für allemal festgehaltenes) t_o eine ebene Kurve γ durch:

$$(4.1) \qquad \gamma := \{(\xi(t),\eta(t)) \mid t_o \leq t < +\infty\} .$$

Ferner sei Σ das abgeschlossene Quadrat:

$$(4.2) \qquad \Sigma := \{(x,y) \mid |x| \leq D_3,\ |y| \leq D_3\} .$$

Äquivalent zu der Beschränktheit von $x(=\xi)$ - eine Lösung von (*) - und ihre Ableitung $\dot{x}(=\eta)$, ist die Beschränktheit der ebenen Kurve γ .
Ebenso ist die Raumkurve $\{\xi(t), \eta(t),\zeta(t) \mid t_o \leq t < \infty\}$ genau dann beschränkt, wenn $\xi = x$, $\dot{x}$ und $\ddot{x}$ beschränkt sind, denn nach (iii) gilt $|P(t)| \leq A_o < \infty$.
Um die Beschränktheit von γ zu zeigen, benötigen wir

Lemma 3:

Entweder ist:

(1) $\gamma \subseteq \Sigma$ oder

(2) Für beliebiges großes $t = T(\geq t_o)$ gibt es Werte

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}(T) \text{ und } \underline{\tau} = \underline{\tau}(T), \text{ so daß}$$

$$\begin{cases} (\xi(\underline{\tau}),\ \eta(\underline{\tau})) \in \Sigma & \underline{\tau} \geq T \\ (\xi(\bar{\tau}),\ \eta(\bar{\tau})) \notin \Sigma & \bar{\tau} \geq T \end{cases}$$

gilt.

Offenbar genügt es zu zeigen, daß folgende Aussage richtig ist.
Für beliebig großes $t = T(\geq t_o)$ gibt es ein $\tau = \tau(T)$, so daß

$$\tau \geq T \text{ und } (\xi(\tau),\ \eta(\tau)) \in \Sigma \text{ gilt.}$$

Beweis:

Angenommen es gebe kein solches τ, also $(\xi(\tau),\eta(\tau)) \notin \Sigma$ für alle $\tau \geq T$.
Nach Definition von Σ und Lemma 2 (2.7) gilt:

$$\dot{\omega}(\tau) \leq -2 D_2 D_3^2 \quad \text{für} \quad \tau \geq T .$$

Daraus folgt $\omega(t) \to -\infty$ wenn $t \to \infty$
in Widerspruch zu Lemma 1 (2.3) .

Dieses Lemma kann auch in der folgenden Weise geschrieben werden:
Zu beliebigem $T(\geq t_0)$ existiert ein $t_1(\geq T)$ mit:

$$|\xi(t_1)| \leq D_3 \quad \text{und} \quad |\eta(t_1)| \leq D_3$$

D.h. hinter jedem beliebig großen Parameterwert gibt es noch einen Parameterwert, für den zugehörige Punkt der Kurve γ innerhalb von Σ liegt.

Nun diskutieren wir die folgende Behauptung, die äquivalent zur Beschränktheit von γ ist.

(4.3) Es existiert eine Konstante D, so daß für $t \geq t_0$ gilt $|\xi(t)| \leq D$ und $|\eta(t)| \leq D$.

Hieraus ergibt sich folgende Fallunterscheidung:

I) Es existiert ein $\hat{t}(\geq t_0)$, so daß
für $t \geq \hat{t}$ gilt $|\xi(t)| \leq D_3$ und $|\eta(t)| \leq D_3$.
Setzen wir

$$D := \max\{D_3, \max_{t_0 \leq t \leq \hat{t}} |\xi(t)|, \max_{t_0 \leq t \leq \hat{t}} |\eta(t)|\},$$

dann gilt offenbar die obige Behauptung.

II) Zu beliebigem $T(\geq t_0)$ existieren t_1 und t_2 mit $t_1 \geq T$ $(i = 1,2)$ und o.B.d.A. $t_1 < t_2$, so daß

$$\begin{cases} |\xi(t_1)| \leq D_3 \,, \; |\eta(t_1)| \leq D_3 \\ |\xi(t_2)| + |\eta(t_2)| > 2\, D_3 \end{cases}$$

gilt.

In diesem Fall wird die Kurve γ (mit Hilfe eines noch zu schildernden Verfahrens) durch eine modifizierte Kurve $\tilde{\gamma}$ ersetzt.

$$(\tilde{\gamma} := \{ (\tilde{\xi}(t), \tilde{\eta}(t)) \mid t \geq t_0 \})$$

Kann nun gezeigt werden, daß zu $\tilde{\gamma}$ eine Konstante $\tilde{D}$ existiert mit der Eigenschaft, daß für $t \geq t_o$ gilt

$$|\tilde{\xi}(t)| \leq \tilde{D} \quad \text{und} \quad |\tilde{\eta}(t)| \leq \tilde{D} ,$$

so sind wir fertig; denn man kann (wie wir zeigen werden) $\tilde{\gamma}$ so "nahe" bei γ wählen, daß:

$$\text{Für } t \geq t_o \text{ gilt } \begin{cases} |\xi(t)| \leq \tilde{D} + 1 \\ |\eta(t)| \leq \tilde{D} + 1 \end{cases}$$

Mit $D := \tilde{D} + 1$,

gilt dann:

$$\text{Für } t \geq t_o \text{ ist } \begin{cases} |\xi(t)| \leq D \\ |\eta(t)| \leq D \end{cases}$$

Also gilt die obige Behauptung.

Für den Beweis der Beschränktheit der Raumkurve (und damit von $x, \dot{x}$ und $\ddot{x}$), wenn die dazugehörige ebene Kurve γ beschränkt ist, benötigen wir das wichtige

Lemma 4:

Es seien $X := \max_{T_1 \leq t \leq T_2} |\xi(t)|$,

$Y := \max_{T_1 \leq t \leq T_2} |\eta(t)|$, wobei $T_1 < T_2$.

Dann existieren positive Konstanten D_4, D_5 mit folgender Eigenschaft:

$t_1 \in [T_1, T_2]$ sei beliebig, so gilt für alle $t \in [T_1, T_2]$:

$$|\zeta(t)| \leq |\zeta(t_1)| + (2\delta_2' + \delta_3') X + D_4 Y + D_5 .$$

Speziell gilt:

Wenn $|\xi(t)| < d_1$ und $|\eta(t)| < d_1$ für alle $t \geq T_3$,

dann existiert ein t_3 mit $t_3 \geq T_3$ und

$$|\zeta(t)| \leq D(d_1) \quad \text{für alle } t \geq t_3 .$$

Beweis:

Er verläuft ganz analog zum Beweis von Lemma 4 bei EZEILO [2] (Seite 103-106), mit dem Unterschied, daß bei der Abschätzung

von $|\zeta(t_o+\tau_o) - \zeta(t_o)|$, da $f_2(\eta) \leq \delta_2'\eta$, $f_3'(\xi) \leq \delta_3'$,

gilt nun:

$$|\zeta(t_o+\tau_o) - \zeta(t_o)| = \left|\int_{t_o}^{t_o+\tau_o} \dot{\zeta}(t)\,dt\right|$$

$$\leq \left|\int_{t_o}^{t_o+\tau_o} f_2(\eta(t))\,dt\right| + \left|\int_{t_o}^{t_o+\tau_o} f_3(\xi(t)\,dt\right|$$

$$\leq \delta_2' \left|\int_{t_o}^{t_o+\tau_o} \dot{\xi}(t)\,dt\right| + \delta_3' \left|\int_{t_o}^{t_o+\tau_o} \xi(t)\,dt\right|$$

$$\leq \delta_2' \left|\int_{\xi(t_o)}^{\xi(t_o+\tau_o)} d\xi\right| + \delta_3' X \left|\int_{t_o}^{t_o+\tau_o} dt\right|$$

$$\leq 2\,\delta_2' X + \delta_3' X \tau_o$$

$$\leq (2\,\delta_2' + \delta_3') X \qquad \text{da } \tau_o \leq 1 .$$

Aus (4.3) und dem zweiten Teil von Lemma 4 folgt:

Für $t \geq t_o$ gilt $|\zeta(t)| \leq D$.

(Es sei verabredet, daß D einen bestimmten Wert annimmt, wenn D indiziert ist, sonst kann D verschiedene Konstanten bezeichnen.)

Mithin ist die Raumkurve $\{(\xi(t),\eta(t),\zeta(t)) \mid t \geq t_o\}$ beschränkt, und damit gilt die anfangs für die Lösung x von (*) aufgestellte Behauptung.

Unser Hauptsatz wäre vollständig bewiesen, wenn wir (4.3) für beide Fälle (I) und (II) bewiesen hätten.

Es wird im folgenden gezeigt, daß der Fall (II), den wir noch nicht vollständig behandelt haben, auf Fall (I) zurückführt. Diesen Übergang formulieren wir als

Lemma 5:

Gelte die in (II) erklärte Situation, dann gilt die Situation (I) - für die modifizierte Kurve $\tilde{\gamma}$ - d.h.:

$$\text{Für } t \geq t_o \text{ ist } \begin{cases} |\tilde{\xi}(t)| \leq \tilde{D} \\ |\tilde{\eta}(t)| \leq \tilde{D} \end{cases}$$

mit passendem $\tilde{D}$.

Die Modifikation der ebenen Kurve γ (dabei auch die Definition von $\tilde{\xi},\tilde{\eta}$) führen wir im nächsten Kapitel durch.

Der Beweis von Lemma 5 folgt aus der Beschränktheit der modifizierten Energiefunktion $\tilde{W}$ an den Schnittpunkten von $\tilde{\gamma}$ und Σ, unter Anwendung der ersten zwei Lemmata.

Die Beschränktheit von $\tilde{W}_s$ ist der Schwerpunkt des letzten Kapitels.

KAPITEL II Die Modifikation der ebenen Kurve "γ"

§ 5 Diskussion des Kurvenverlaufs von γ

Zunächst zeigen wir das folgende

Lemma 6:

(5.1) ξ ist in der oberen (unteren) Halbebene längs γ streng monoton wachsend (fallend) .

(5.2) Stationäre Werte von ξ (d.h. Punkte von γ , in denen $\dot{\xi} = 0$ ist), können höchstens auf der x-Achse vorkommen.

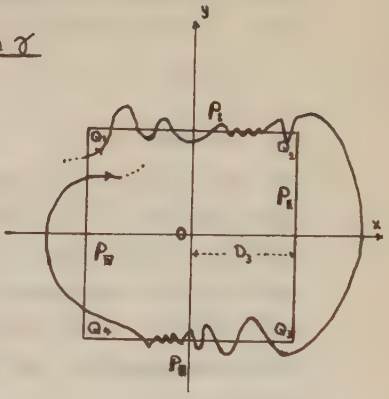

Abb. 1

Beweis:
Ergibt sich unmittelbar aus der Identität:

(5.3) $\dot{\xi}(t) \equiv \eta(t)$ für $t_0 \leq t < +\infty$.

Im Hinblick auf die nur noch nachzuweisende Beschränktheit von γ kann angenommen werden, daß in Lemma 3 der Fall (2) eintritt.
Dann gibt es aber einen kleinsten Wert t_1 mit:

$$\begin{cases} t_1 \geq t_0 \\ (\xi(t_1),\ \eta(t_1)) \in (\Sigma) \end{cases} \qquad (\Sigma) := \text{Rand } \Sigma$$

Fall α): $t_1 = t_0$

So wird der Punkt $(\xi(t_0),\ \eta(t_0))$ der Anfangspunkt bei dem einzuführenden Abzählungsprozeß.
Der Punkt $(\xi(t_0),\ \eta(t_0))$ werde dann mit E_1 bezeichnet.

Fall β): $t_1 > t_0$

So liegt das Kurvenstück

$$\gamma_1 := \{(\xi(t),\ \eta(t)) \mid t_0 \leq t \leq t_1\}$$

mit Ausnahme von $(\xi(t_1),\ \eta(t_1))$ entweder ganz im Inneren von Σ oder ganz im Äußeren von Σ.
Die Punkte $(\xi(t_1),\ \eta(t_1))$ werden mit E_1 bezeichnet

$(i = 0,1)$. Es ist dann $\gamma_i = \overset{\frown}{E_0 E_1}$.

Wir wollen die Seiten des Quadrats Σ - wie in der Zeichnung angegeben - mit $\mathfrak{P}_I$, $\mathfrak{P}_{II}$, $\mathfrak{P}_{III}$ und $\mathfrak{P}_{IV}$ bezeichnen (einschließlich der Endpunkte).
Man definiere:

(5.4) $\quad S := \{t \mid t \geq t_0 \text{ und } (\xi(t), \eta(t)) \in (\Sigma)\}$.

Nach Lemma 3 enthält S beliebig große t-Werte.

Fallunterscheidungen:

β 1) $\quad E_1 \in \mathfrak{P}_I$:

β 1.1: Es sei zunächst angenommen, daß

$$\forall t (t \in S \rightsquigarrow (\xi(t), \eta(t)) \in \mathfrak{P}_I) .$$

Dann existiert eine Folge $((\tilde{t}_\nu))$ $(\nu = 1,2,\ldots)$ mit:

$$t_1 = \tilde{t}_1 < \tilde{t}_2 < \tilde{t}_3 < \ldots < \tilde{t}_\nu < \ldots$$

und $(\xi(\tilde{t}_\nu), \eta(\tilde{t}_\nu)) \in \mathfrak{P}_I$.

Damit erhalten wir in diesem Fall abzählbar viele Intervalle

$$\tilde{I}_\nu := [\tilde{t}_\nu, \tilde{t}_{\nu+1}] \qquad (\nu = 1,2,3\ldots) .$$

Der Verlauf der Kurve γ wird später für jedes dieser Intervalle einzeln diskutiert. Wir werden dann γ über dem Intervall $\tilde{I}_\nu$ in jeweils endlich viele Teilbögen zerlegen. Diese Zerlegung wird später anhand eines endlichen Intervalls genau geschildert.

β 1.2: Es existiert mindestens ein t aus S mit:

$$(\xi(t), \eta(t)) \notin \mathfrak{P}_I .$$

Man bilde dann:

(5.5) $\quad \tilde{t} := \inf \{t \mid t > t^*, t \in S, (\xi(t), \eta(t)) \notin \mathfrak{P}_I\}$,

wobei $t^* := t_1$.

Wegen der Stetigkeit von ξ, η gilt jedenfalls:

$$(\xi(\tilde{t}), \eta(\tilde{t})) \in \mathfrak{P}_{II} \cup \mathfrak{P}_{III} \cup \mathfrak{P}_{IV} .$$

Fallunterscheidung:

β 1.2.1: $(\xi(\tilde{t}), \eta(\tilde{t})) \in \mathfrak{P}_I$.

Dann setze man $t^{**} := \tilde{t}$ und behandde dann das Intervall

$[t^*, t^{**}]$.

Die Kurve γ wird wieder über dem Intervall $[t^*, t^{**}]$ in endlich viele Teilbögen zerlegt. Dabei bekommt t^{**} etwa die Numerierung t_{i_1}, und es ist

$E_{i_1} := (\xi(t_{i_1}), \eta(t_{i_1})) \in \mathbb{P}_I$. Von E_{i_1} geht man dann weiter.

Nach Lemma 3 gibt es einen kleinsten t-Wert t_{i_1+1} mit :

$$(5.6) \qquad \begin{cases} t_{i_1+1} > t_{i_1} , \\ E_{i_1+1} := (\xi(t_{i_1+1}), \eta(t_{i_1+1})) \in (\Sigma) = \bigcup_{j=I}^{\bar{\nu}} \mathbb{P}_j . \end{cases}$$

<u>β 1.2.2:</u> $(\xi(\tilde{t}), \eta(\tilde{t})) \notin \mathbb{P}_I$.

Dann bilde man :

$$(5.7) \qquad t^{**} := \sup \{t \mid t^* \leqq t < \tilde{t}, \quad (\xi(t), \eta(t)) \in \mathbb{P}_I\} .$$

Dann gilt wegen der Stetigkeit von ξ, η wieder:

$$(\xi(t^{**}), \eta(t^{**})) \in \mathbb{P}_I ,$$

und daher

$$t^{**} < \tilde{t} .$$

Nun wird wieder das Intervall $[t^*, t^{**}]$ behandelt.

Falls noch $t^{**} = t^*$, d.h.wenn für $t_o \leqq t < \tilde{t}$ die Kurve γ $\mathbb{P}_I$ nur im Punkt $E_1 = (\xi(t_1), \eta(t_1))$ schneidet, dann existiert auch hier nach Lemma 3 ein kleinster t-Wert, t_2, so daß

$$\begin{cases} t_2 > t_1 , \\ (\xi(t_2), \eta(t_2)) \in (\Sigma) . \end{cases}$$

Für t_2 gilt dann:

$$(\xi(t), \eta(t)) \notin (\Sigma) \quad \text{für} \quad t_1 < t < t_2 .$$

Dann erhalten wir mit $E_2 := (\xi(t_2), \eta(t_2))$ den zweiten Bogen $\overset{\frown}{E_1 E_2}$ der Kurve γ.

Es gilt nun:

$$(5.8) \qquad E_2 \in \bigcup_{j=I}^{\bar{\nu}} \mathbb{P}_j .$$

(Bemerkung: In dem Fall $E_2 \in \mathbb{P}_{II}$ und $\xi(t_1) = \eta(t_1) = D_3$ beachte man, daß γ kein noch so kurzes Stück auf $\mathbb{P}_{II}$ verlaufen kann, da $\dot{\xi}(t) = \eta(t) > 0$ in einer Umgebung von t_1 . Es folgt noch, da $\dot{\xi} = \eta$, daß die Kurve entlang $\mathbb{P}_{II}$ nicht

schwingen kann. Es kann aber sein, daß die Kurve γ um die Mitte von $\mathfrak{P}_{II}$ sich unendlich oft herumwindet und sich der Mitte von $\mathfrak{P}_{II}$ beliebig nähert!).

Man definiere die Menge:

(5.9) $\quad M_I := \{t \mid t^* \leq t \leq t^{**} \text{ und } (\xi(t), \eta(t)) \in \mathfrak{P}_I\}$.

Im § 6 werden die Häufungspunkte dieser Menge durch abzählbar endlich viele Intervalle überdeckt.

β 2) $E_1 \in \mathfrak{P}_{II}$:

D.h. $(\xi(t_1), \eta(t_1)) \in \mathfrak{P}_{II}$, also $(D_3, \eta(t_1)) \in \mathfrak{P}_{II}$

Fallunterscheidung:

β 2.1: Es sei zunächst angenommen, daß

$$\eta(t_1) \neq 0 .$$

Dann existiert wegen $\dot{\xi} = \eta$ ein $\delta(= \delta(t_1))$ mit der Eigenschaft:

$$|t - t_1| < \delta \rightsquigarrow (\xi(t), \eta(t)) \notin (\Sigma) .$$

Man setze: $t^* := t_1$. Wenn S ganz auf $\mathfrak{P}_{II}$ liegt, ergibt sich ein zu β 1.1 analoger Fall. Liegt S nicht nur auf $\mathfrak{P}_{II}$, dann definiere man in Analogie zu den Betrachtungen unter β 1.2 t^{**} und die Menge:

(5.10) $\quad M_{II} := \{t \mid t^* \leq t \leq t^{**} \text{ und } (\xi(t), \eta(t)) \in \mathfrak{P}_{II}\}$.

Für die Häufungspunkte (siehe die Bemerkung unter β 1.2.2) der Menge M_{II} wird die Konstruktion eines endlichen Überdeckungssystems wiederholt werden.

Die Kurve γ wird dann wieder über dem Intervall $[t^*, t^{**}]$ in endlich viele Teilbögen zerlegt.

β 2.2: Es sei nun: $\eta(t_1) = 0$

Dann kann für ein gewisses δ $(= \delta(t_1))$ folgendes eintreten:

$$|t - t_1| \leq \delta \rightsquigarrow \eta(t) = 0 .$$

Das drückt sich in dem Differentialgleichungssystem so aus:
Aus $\eta(t) = 0$ für $|t - t_1| \leq \delta$

folgt auch $\dot{\eta}(t) = 0$ für $|t - t_1| < \delta$
Dann gilt nach (1.5)/(1.6)

$$\left.\begin{aligned} \zeta(t) &= -P(t) \\ \dot{\zeta}(t) &= -f_3(\xi(t)) = -f_3(D_3) \end{aligned}\right\} \quad \text{für } |t - t_1| \leq \delta$$

$\rightsquigarrow \zeta(t) = -f_3(D_3)\, t + \varkappa = -P(t)$

$\rightsquigarrow p(t) = -f_3(D_3)$.

Es kann aber nicht gelten:

(5.11) $\eta(t) = 0$ für alle $t \geq t_1$.

Widerspruch wegen $|P(t)| \leq A_0$, wenn $f_3(D_3) \neq 0$.

Für $f_3(D_3) = 0$ ist der Hauptsatz bewiesen, denn

(5.12)
$$\begin{cases} \xi(t) \equiv D_3 \\ \eta(t) \equiv 0 \\ \zeta(t) \equiv \varkappa \end{cases}$$

ist die einzige Lösung von (**) mit $\eta(t) \equiv 0$. Diese Lösung ist beschränkt.

Im Fall $f_3(D_3) \neq 0$ gibt es also einen größten Wert t^* mit

$$\forall t (t_1 \leq t \leq t^* \rightsquigarrow \eta(t) = 0)$$

d.h. für $t > t^*$ existiert ein δ^*, so daß

$$0 < t - t^* < \delta^* \rightsquigarrow (\xi(t), \eta(t)) \notin (\Sigma) .$$

Dann wähle man t^* als Ausgangsparameter und gehe analog zu β 2.1 vor.

β 3) $E_1 \in \mathfrak{P}_{III}$:

Dieser Fall wird analog wie $E_1 \in \mathfrak{P}_I$ behandelt.

β 4) $E_1 \in \mathfrak{P}_{IV}$:

Kann ebenso wie der Fall $E_1 \in \mathfrak{P}_{II}$ betrachtet werden.

Die Fälle in (5.6) und (5.8) brauchen nicht mehr diskutiert zu werden.

§ 6 "Stückweise" Approximation von γ durch eine Ersatzkurve $\tilde{\gamma}$

Fall α) Die Modifikation auf den horizontalen Kanten

Für die Menge $\mathfrak{M}$ der Häufungspunkte von M (M sei gesetzt für die Menge M_I oder M_{III}, wobei

$$M_I := \{ t \mid t^* \leq t \leq t^{**} \text{ und } (\xi(t),\eta(t) \in \mathfrak{P}_I \}$$

$$M_{III} := \{ t \mid t^* \leq t \leq t^{**} \text{ und } (\xi(t),\eta(t) \in \mathfrak{P}_{III} \})$$

gilt nun:

$\mathfrak{M}$ ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt.

Es sei nun δ ($\delta > 0$) gegeben (später wird δ noch speziell gewählt werden), und es sei

$$(6.1) \qquad u(t \mid \delta) := \{ \tau \mid |\tau - t| < \delta \} .$$

Dann ist $u(t \mid \delta)$ eine offene Menge, die t enthält, und

$$(6.2) \qquad \mathfrak{M} \subseteq \bigcup_{t \in \mathfrak{M}} u(t \mid \delta) .$$

Daher ist

$$\{u(t \mid \delta) \mid t \in \mathfrak{M}\}$$

eine "offene Überdeckung" von $\mathfrak{M}$.
Da $\mathfrak{M}$ kompakt ist, gibt es nach dem Satz von HEINE-BOREL-LEBESGUE endlich viele $\tilde{t}_\nu$ (aus $\mathfrak{M}$), etwa:

$$\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_m \qquad \text{mit}$$

$$(6.3) \qquad \mathfrak{M} \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{m} u(\tilde{t}_\nu \mid \delta)$$

(Bemerkung: Die Wahl der $\tilde{t}_\nu$ hängt von δ ab)

und

$$(6.4) \qquad \mathfrak{M} \cap u(\tilde{t}_\nu \mid \delta) \neq \emptyset \quad (\nu = 1,\ldots,m)$$

Dann gilt auch

$$(6.5) \qquad M \cap u(\tilde{t}_\nu \mid \delta) \neq \emptyset \quad (\nu = 1,\ldots,m)$$

Weiter existieren endlich viele abgeschlossene Intervalle $\hat{I}_\nu$ ($\nu = 1,\ldots,n$) mit

$$\bigcup_{\nu=1}^{m} \overline{u(\tilde{t}_\nu \mid \delta)} = \bigcup_{\mu=1}^{n} \hat{I}_\mu \quad \text{und}$$

$$(6.6) \qquad \hat{I}_\nu \cap \hat{I}_\mu = \emptyset , \qquad \nu \neq \mu .$$

Offenbar gelten noch:

(6.7) $\mathfrak{M} \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{n} \hat{I}_\nu$,

(6.8) $M \cap \hat{I}_\nu \neq \emptyset \quad (\nu = 1,\ldots,n)$.

Fallunterscheidung:

Fall a) Es sei zunächst angenommen:

$$\bigcup_{\nu=1}^{n} \hat{I}_\nu \supseteq [t^*,t^{**}] .$$

Dann wird bei der Zählung der Kurvenbögen einfach weitergegangen, d.h.: war etwa $t^* = t_\kappa$, so soll $t_{\kappa+1} := t^{**}$ gelten.

Fall b) Es sei nun:

$$\bigcup_{\nu=1}^{n} \hat{I}_\nu \not\supseteq [t^*,t^{**}]$$

b_1) $t^* \notin \mathfrak{M}$ und $t^{**} \notin \mathfrak{M}$

Man definiere dann

(6.9) $N := (t^*,t^{**}) \setminus \bigcup_{\nu=1}^{n} \hat{I}_\nu$

Nach Annahme gibt es dann mindestens ein $\hat{t}$ aus $[t^*,t^{**}]$, welches nicht zu $\bigcup_{\nu=1}^{n} \hat{I}_\nu$ gehört.
Da $\bigcup_{\nu=1}^{n} \hat{I}_\nu$ abgeschlossen, so gibt es um $\hat{t}$ ein (Halb)Intervall, welches auch nicht zu $\bigcup_{\nu=1}^{n} \hat{I}_\nu$ gehört.
Aus (6.9) folgt dann, daß

$N \neq \emptyset$ und N offen ist.

Ferner folgt sogar, daß für N eine Darstellung der Form:

(6.10) $N = \bigcup_{\nu=0}^{n} J_\nu$ gilt mit

(6.11) $\begin{cases} J_\nu \text{ offenes Intervall} & (\nu = o,\ldots,n) \\ J_\nu \cap J_\mu = \emptyset & \text{für } \mu \neq \nu . \end{cases}$

Dabei kann o.B.d.A. vorausgesetzt werden, daß mit:

(6.12) $J_\nu = (a_\nu,b_\nu) \qquad (\nu = o,\ldots,n)$

gilt:

(6.13) $a_\nu < b_\nu < a_{\nu+1} < b_{\nu+1} \quad (\nu = o,\ldots,n-1)$.

Man beachte wegen Fall b_1), daß

$$a_o = t^* \quad \text{und} \quad b_n = t^{**}$$

gilt.
Nun ist wegen (6.7) und (6.9) gewiß:

(6.14) $\quad \mathfrak{M} \cap N = \emptyset$.

Also folgt wegen der Beschränktheit von N, daß

(6.15) $\quad M \cap N$ endlich ist.

Nun definieren wir

(6.16) $\quad t_\nu^{(1)} := \inf \{ \tau \mid \tau \in M \text{ und } b_{\nu-1} \leq \tau \} \quad (\nu = 1,\ldots,n)$

und

(6.17) $\quad t_\nu^{(2)} := \sup \{ \tau \mid \tau \in M \text{ und } \tau \leq a_\nu \} \quad (\nu = 1,\ldots,n)$

Anschaulich:

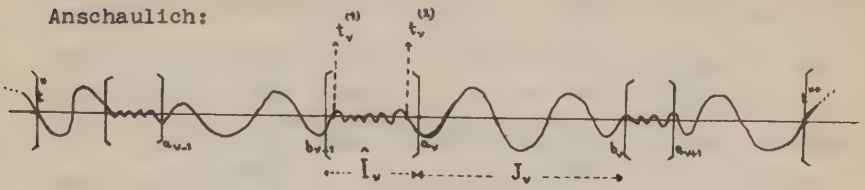

Abb. 2

Offenbar gilt:

(6.18) $\quad t_\nu^{(1)} \geq b_{\nu-1}$

(6.19) $\quad t_\nu^{(2)} \leq a_\nu$

} für $(\nu = 1,\ldots,n)$

Wegen der Stetigkeit von η folgt aus (6.16)/(6.17) gewiß:

(6.20) $\quad \eta(t_\nu^{(1)}) = D_3$

(6.21) $\quad \eta(t_\nu^{(2)}) = D_3$

} für $(\nu = 1,\ldots,n)$

Wegen (6.13)/(6.6) gilt auch noch:

(6.22) $\quad t_\nu^{(1)} \leq a_\nu$

(6.23) $\quad t_\nu^{(2)} \geq b_{\nu-1}$

(6.24) $\quad t_\nu^{(2)} \geq t_\nu^{(1)}$

} für $(\nu = 1,\ldots,n)$

Wir wählen nun die Parameterwerte $t_\nu^{(1)}$, $t_\nu^{(2)}$ und die Parameterwerte der endlichen Menge $M \cap N$ alle zusammen als (neue!) Parameterwerte, die zwischen t^* und t^{**} der Größe nach geordnet eingeschaltet werden.

Die den Parameterwerten, etwa t_χ benannt, zugeordneten Punkte $E_\chi := (\xi(t_\chi), \eta(t_\chi))$ werden u.a. die Anfangs- bzw. Endpunkte der nun zu definierenden Bögen sein.

Wir definieren dazu auf $[t^*, t^{**}]$ die folgenden Funktionen:

(6.25) $\tilde{\xi}(t) := \xi(t)$ für $t^* \leqq t \leqq t^{**}$

(6.26) $\tilde{\eta}(t) := \begin{cases} D_3 & \text{für } t \in [t_\nu^{(1)}, t_\nu^{(2)}],\ \nu = 1,\ldots,n \\ \eta(t) & \text{sonst} \end{cases}$

(6.27) $\tilde{\zeta}(t) := \zeta(t)$ für $t^* \leqq t \leqq t^{**}$

(6.28) $\partial\tilde{\xi}(t) := \dot{\xi}(t)$ für $t^* \leqq t \leqq t^{**}$

(6.29) $\partial\tilde{\eta}(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \in [t_\nu^{(1)}, t_\nu^{(2)}],\ \nu = 1,\ldots,n \\ \dot{\eta}(t) & \text{sonst} \end{cases}$

(6.30) $\partial\tilde{\zeta}(t) := \dot{\zeta}(t)$ für $t^* \leqq t \leqq t^{**}$

Nun sei für die geraden Kurventeile (modifiziert oder unmodifiziert!) folgendes verabredet:

"Die gerade Strecke, die zwischen zwei auf einer Seite liegenden Bögen liegt, wird als auf der anderen Seite liegend betrachtet.

Die gerade Strecke, die zwischen zwei auf verschiedenen Seiten liegenden Bögen liegt, wird in irgend zwei auf verschiedenen Seiten liegenden Strecken zerlegt."

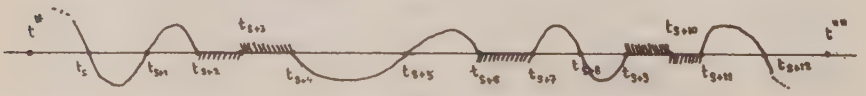

Abb. 3

Nach dieser Verabredung liegt jeder endgültige Bogen zwischen zwei auf einer Seite liegenden Bögen.

Die t-Werte der gewählten Trennpunkte von einigen Geradenstücken werden nun - der Größe nach geordnet - in die $(\!(t_\varkappa)\!)$-Folge eingebettet.

Die den Parameterwerten, etwa t_s benannt, zugeordneten Punkte $E_s := (\tilde{\xi}(t_s), \tilde{\eta}(t_s))$ sind nun die endgültigen Teilpunkte von $\tilde{\mathcal{Y}}$.

b_2) Es sei etwa $t^* \in \mathfrak{M}$.
Man sieht dann, daß auch in diesem Fall, die durch (6.9)

$$N := (t^*, t^{**}) \setminus \bigcup_{\nu=1}^{n} \hat{I}_\nu$$

gegebene Menge offen ist. Die weiteren Konstruktionen laufen analog.

Speziell existiert ein kleinstes t_1 mit $t_1 > t^*$ und

$$\tilde{\eta}(t) = D_3 \quad \text{für} \quad t \in [t^*, t_1]$$

und"genügend nahe" rechts von t_1, so daß die Relation:

$$\tilde{\eta}(t) \neq D_3 \quad (\text{für} \quad t > t_1) \quad \text{gilt.}$$

Man kann dann von t_1 wie bei Fall b_1) von t^* - ausgehend - vorgehen.

Fall β) Die Modifikation auf den vertikalen Kanten

Die Menge der Häufungspunkte von M_{II} (bzw. M_{IV}) ist kompakt, und sei wieder mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet.

Die Konstruktion eines endlichen Überdeckungssystems kann nun - mit Hilfe von δ ($\delta > 0$), das in § 7 speziell gewählt werden wird - analog zu dem Vorgehen unter α) wiederholt werden.
Es gelte etwa: $\mathfrak{M} \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{n} \hat{I}_\nu$

Die $\hat{I}_\nu$ sind wieder "wachsend angeordnet" abgeschlossene paarweise disjunkte Intervalle.

Analog gibt es zu jedem $\hat{I}_\nu$ Punkte $t_\nu^{(1)}$ und $t_\nu^{(2)}$ mit $t_\nu^{(i)} \in M$ $(i = 1,2)$ und

$$\begin{cases} t_\nu^{(i)} \in \hat{I}_\nu & (i=1,2;\ \nu=1,\dots,n) \\ t_\nu^{(1)} \le t_\nu^{(2)} & \\ M \cap [t_\nu^{(2)},\ t_{\nu+1}^{(1)}] & \text{endlich } (\nu=1,2\dots,n-1) \end{cases}$$

$$M \cap [t^*, t_1^{(1)}] \text{ und } M \cap [t_n^{(2)}, t^{**}] \text{ endlich}$$

Die endgültigen Teilpunkte E_s werden analog zum horizontalen Fall definiert (s. Abb. 4).

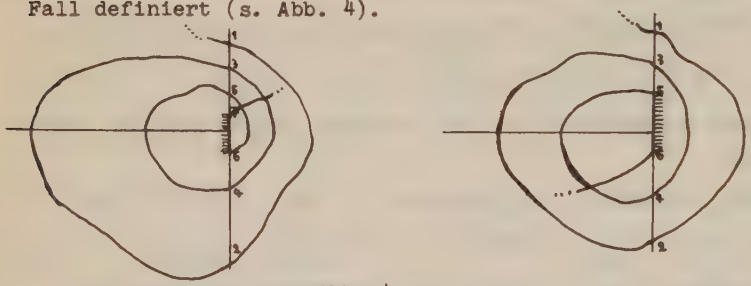

Abb. 4

Nun definieren wir auf $[t^*,t^{**}]$ die folgenden Funktionen:

(6.31) $$\tilde{\xi}(t) := \begin{cases} D_3 & \text{für } t \in [t_\nu^{(1)}, t_\nu^{(2)}],\ \nu=1,\dots,n \\ \xi(t) & \text{sonst} \end{cases}$$

(6.32) $$\tilde{\eta}(t) := \begin{cases} \dfrac{\eta(t_\nu^{(2)}) - \eta(t_\nu^{(1)})}{t_\nu^{(2)} - t_\nu^{(1)}} \left(t - t_\nu^{(1)}\right) + \eta(t_\nu^{(1)}) & \\ & \text{für } t \in [t_\nu^{(1)}, t_\nu^{(2)}],\ \nu=1,2\dots,n \\ \eta(t) & \text{sonst} \end{cases}$$

(6.33) $$\tilde{\zeta}(t) := \zeta(t) \quad \text{für } t^* \le t \le t^{**}$$

(6.34) $$\partial\tilde{\xi}(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \in [t_\nu^{(1)}, t_\nu^{(2)}],\ \nu=1,2\dots,n \\ \dot{\xi}(t) & \text{sonst} \end{cases}$$

(6.35) $$\partial\tilde{\eta}(t) := \begin{cases} \dfrac{\eta(t_\nu^{(2)}) - \eta(t_\nu^{(1)})}{t_\nu^{(2)} - t_\nu^{(1)}} & \text{für } t \in [t_\nu^{(1)}, t_\nu^{(2)}],\ \nu=1,2\dots,n \\ \eta(t) & \text{sonst} \end{cases}$$

(6.36) $$\partial\tilde{\zeta}(t) := \dot{\zeta}(t) \quad \text{für } t^* \le t \le t^{**}$$

§ 7 Wahl von δ (durch das Modifizieren von Lemma 2)

Das Ziel ist nun, die bei der Konstruktion der Ersatzkurve auftretende Zahl $\delta(>0)$ passend zu wählen.

α) Definition von δ

α) Wir betrachten zunächst die Menge:

$$\{(\xi(t),\eta(t),\zeta(t),\dot{\xi}(t),\dot{\eta}(t),\dot{\zeta}(t)) \mid t \in \mathfrak{D}M\}$$

$$M := M_i \qquad i \in \{I,II,III,IV\} .$$

Da die Funktionen $\xi,\ldots,\dot{\zeta}$ stetig sind, so ist die durch

$$\mathfrak{x}(t) := (\xi(t),\ldots,\dot{\zeta}(t))$$

definierte Funktion $\mathfrak{x}$ insbesondere stetig auf $\mathfrak{D}M$. Daher ist wegen der Kompaktheit von $\mathfrak{D}M$ die Menge

$$\mathbb{K}^6 := \{\mathfrak{x}(t) \mid t \in \mathfrak{D}M\}$$

eine kompakte Teilmenge in dem metrischen Raum $\mathbb{R}^6$.
Wir definieren nun:

$$(7.1) \quad \Phi(\xi,\eta,\zeta,\rho,\theta,\tau) := \rho\frac{\partial w}{\partial \xi} + \theta\frac{\partial w}{\partial \eta} + \tau\frac{\partial w}{\partial \zeta} \qquad w = w(\xi,\eta,\zeta)$$

$$(7.2) \quad -\Psi(\xi,\eta) := -\frac{D_o}{2}(\xi^2+\eta^2) + D_1(|\xi| + |\eta|)$$

Aus Lemma 2 und der Kompaktheit von $\mathfrak{D}M$ folgt die Existenz einer Zahl $\varepsilon_M (>0)$ mit:

$$(7.3) \quad -\Phi(\xi(t),\ldots,\dot{\zeta}(t)) - \Psi(\xi(t),\eta(t) \geq \varepsilon_M > 0 \qquad \text{für } t \in \mathfrak{D}M .$$

Wir definieren noch:

$$(7.4) \quad H(\xi,\eta,\zeta,\rho,\theta,\tau) := -\Phi(\xi,\eta,\zeta,\rho,\theta,\tau) - \Psi(\xi,\eta)$$

Benutzen wir für das Argument der Funktionen Φ und H die Vektorschreibweise

$$\mathfrak{z} := (\xi,\eta,\zeta,\rho,\theta,\tau), \quad \text{so gilt } \mathfrak{z} \in \mathbb{R}^6, \text{ und es folgt:}$$

$$(7.5) \quad H(\mathfrak{x}(t)) \geq \varepsilon_M > 0 \qquad \text{für } t \in \mathfrak{D}M .$$

Da Φ und Ψ stetig auf $\mathbb{R}^6$ sind, ist auch H auf $\mathbb{R}^6$, mithin auch auf $\mathfrak{x}(\mathfrak{D}M)$, d.h. auf $\mathbb{K}^6$ stetig.

Es gilt nun:

(7.6) $H(\vartheta) \geq \varepsilon_M > 0 \qquad$ für $\vartheta \in \mathbb{K}^6$.

Da H stetig auf $\mathbb{R}^6$, $\mathbb{K}^6$ ein Kompaktum und die Ungleichung (7.6) gilt, so ergibt sich die Existenz eines δ_M (> 0) - für δ_M gelte o.B.d.A.: $\delta_M \leq 1$ - so daß folgende Aussage gilt:

(7.7) wenn $\vartheta := (\xi,\eta,\zeta,\rho,\theta,\tau) \in \mathbb{K}^6$ und $\tilde{\vartheta} := (\tilde{\xi},\tilde{\eta},\tilde{\zeta},\tilde{\rho},\tilde{\theta},\tilde{\tau}) \in \mathbb{R}^6$ mit der Eigenschaft:
$|\tilde{\xi} - \xi| < \delta_M$, $|\tilde{\eta} - \eta| < \delta_M, \ldots, |\tilde{\tau} - \tau| < \delta_M$
so ist: $H(\tilde{\vartheta}) \geq \frac{\varepsilon_M}{2} > 0$

α_2) Nun sind $\xi,\eta,\ldots,\dot{\zeta}$ gleichmäßig stetig auf $\mathfrak{D}M$.
Daher gilt:

(7.8) Es existiert ein $\delta(> 0)$, $\delta = \delta(\delta_M)$, so daß
wenn $t \in \mathfrak{D}M$ und $\hat{t} \in [t^*,t^{**}]$
Für $|\hat{t} - t| \leq \delta$ gilt
$|\xi(\hat{t}) - \xi(t) < \delta_M$, $|\eta(\hat{t}) - \eta(t)| < \delta_M, \ldots, |\dot{\zeta}(\hat{t}) - \dot{\zeta}(t)) < \delta_M$

Mit diesem δ führe man die Konstruktion von § 6 der Ersatzkurve durch.

β) <u>Beweis, daß für die modifizierte Kurve $\tilde{\gamma}$ das Lemma 2 mit $\frac{D_o}{2}$ anstelle von D_o gilt</u>

D.h.: Wenn $\partial\tilde{\omega}(t) := \Phi(\tilde{\xi}(t),\tilde{\eta}(t),\tilde{\zeta}(t),\partial\tilde{\xi},\partial\tilde{\eta},\partial\tilde{\zeta})$, so gilt

$(\tilde{2.6})$ $\partial\tilde{\omega}(t) \leq -\frac{D_o}{2}(\tilde{\xi}^2(t) + \tilde{\eta}^2(t)) + D_1(|\tilde{\xi}(t)| + |\tilde{\eta}(t)|)$
für $t_o \leq t < +\infty$

speziell gilt:

$(\tilde{2.7})$ $\partial\tilde{\omega}(t) \leq -\frac{D_2}{2}(\tilde{\xi}^2(t) + \tilde{\eta}^2(t))$, wenn $\max\{|\tilde{\xi}(t)|,|\tilde{\eta}(t)|\} \geq 2D_3$,
$\partial\tilde{\omega}(t) < 0$ wenn $\max\{|\tilde{\xi}(t)|,|\tilde{\eta}(t)|\} \geq D_3$

Nach dem Vorgehen unter α) genügt es zu zeigen, daß:

(7.9) $H(\mathfrak{x}(t)) \geq 0$ für $t \in [t^*, t^{**}]$,

gilt. [Der Beweis von (2.7) verläuft analog zum Beweis von (2.7)]

Fallunterscheidung:

β_1) Es sei $t \in [t^*, t^{**}] \setminus \bigcup_{\nu=1}^{n} [t_\nu^{(1)}, t_\nu^{(2)}]$.

Beweis von (7.9) ist dann trivial, weil:

$$-D_0(\xi^2 + \eta^2) + D_1(|\xi| + |\eta|) \leq -\frac{D_0}{2}(\xi^2 + \eta^2) + D_1(|\xi| + |\eta|)$$

und wegen $\tilde{\mathfrak{x}}(t) = \mathfrak{x}(t)$ in diesem Fall Lemma 2 gilt.

β_2) Es sei nun $t \in \bigcup_{\nu=1}^{n} [t_\nu^{(1)}, t_\nu^{(2)}]$.

Es genügt in diesem Fall zu zeigen, daß für $\hat{t} \in \bigcup_{\nu=1}^{n} [t_\nu^{(1)}, t_\nu^{(2)}]$:

(7.10)
$$\begin{cases} ① & |\tilde{\xi}(\hat{t}) - \xi(\hat{t})| < \delta_M \\ ② & |\tilde{\eta}(\hat{t}) - \eta(\hat{t})| < \delta_M \\ ③ & |\tilde{\zeta}(\hat{t}) - \zeta(\hat{t})| < \delta_M \\ ④ & |\partial\tilde{\xi}(\hat{t}) - \dot{\xi}(\hat{t})| < \delta_M \\ ⑤ & |\partial\tilde{\eta}(\hat{t}) - \dot{\eta}(\hat{t})| < \delta_M \\ ⑥ & |\partial\tilde{\zeta}(\hat{t}) - \dot{\zeta}(\hat{t})| < \delta_M \end{cases}$$

gilt, dann folgt nach (7.7), daß:

$$H(\tilde{\mathfrak{x}}(t)) \geq \frac{\varepsilon_M}{2} > 0 \quad \text{für} \quad t \in \bigcup_{\nu=1}^{n} [t_\nu^{(1)}, t_\nu^{(2)}] .$$

Für die Beweise von ① bis ⑥ bei (7.10) müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

β 2.1: Für die horizontalen Kanten

①, ③, ④ und ⑥ gelten trivialerweise (Betrag ist sogar Null!)

Beweis von ② und ⑤:

Nach Konstruktion von $[t_\nu^{(1)}, t_\nu^{(2)}]$ existiert (mindestens) ein t aus $\mathfrak{M}$ mit $|\hat{t} - t| \leq \delta$.

Nach (7.8) gilt daher:

(7.11) $|\eta(\hat{t}) - \eta(t)| < \delta_M$ und

(7.12) $|\dot{\eta}(\hat{t}) - \dot{\eta}(t)| < \delta_M$.

Nun ist $|\eta(t)| = D_3$ für $t \in \mathfrak{M}$ (Stetigkeit von η).

Nach Definition von $\tilde{\eta}$ gilt

$$\tilde{\eta}(\hat{t}) = D_3 \quad \text{für} \quad \hat{t} \in \bigcup_{\nu=1}^{n} [t_\nu^{(1)}, t_\nu^{(2)}].$$

Also gilt $\eta(t) = \tilde{\eta}(\hat{t})$.

Einsetzen in (7.11), ergibt dann

② $|\tilde{\eta}(\hat{t}) - \eta(\hat{t})| < \delta_M$.

Da $t \in \mathfrak{M}$, dann existiert $(\!(t_i)\!)$ mit $t_i \in M_I$ und

$$t_i \longrightarrow t$$

$$\curvearrowright \dot{\eta}(t) = \lim_{i \to \infty} \frac{\eta(t_i) - \eta(t)}{t_i - t} = 0 .$$

(da $\eta(t_i) = D_3 = \eta(t)$ und $t_i \neq t$).

Mit $\partial\tilde{\eta}(t) = \partial\tilde{\eta}(\hat{t}) = 0$ (nach Definition von $\partial\tilde{\eta}$) ergibt sich

$$\partial\tilde{\eta}(\hat{t}) = \dot{\eta}(t) \quad \text{für} \quad t \in \mathfrak{M}$$

wegen (7.12) folgt nun:

⑤ $|\partial\tilde{\eta}(\hat{t}) - \dot{\eta}(\hat{t})| < \delta_M$.

Damit ist (7.10) bewiesen.

β 2.2: Für die vertikalen Kanten

③ und ⑥ gelten trivialerweise.

Zu ① und ② :

o.B.d.A. sei $\hat{t} \in [t_\nu^{(1)}, t_\nu^{(2)}]$ (ν fest!)

Es gibt wieder ein t, $t \in \mathfrak{M}$ mit $|\hat{t} - t| \leq \delta$

und nach (7.8)

(7.13) $|\xi(t) - \xi(\hat{t})| < \frac{\delta_M}{2} < \delta_M$

(7.14) $|\eta(t) - \eta(\hat{t})| < \frac{\delta_M}{2} < \delta_M$

Beweis von ①:

Nach Definition von $\tilde{\xi}$ ist: $\tilde{\xi}(\hat{t}) = D_3$

Nach Stetigkeit von ξ gilt: $\xi(t) = D_3$

Dann folgt: $\xi(t) = \tilde{\xi}(\hat{t})$

Wegen (7.13) ist nun:

(1) $\quad |\tilde{\xi}(\hat{t}) - \xi(\hat{t})| < \delta_M$.

Beweis von (2) :

Es gilt $\eta(t) = 0$, weil $t \in \mathfrak{M}$ für $t_i \in M$, $t_i \to t$

$$\eta(t) = \dot{\xi}(t) = \lim_{i \to \infty} \frac{\xi(t_i) - \xi(t)}{t_i - t} = 0 \quad \text{folgt.}$$

Wegen (7.14) gilt nun:

(7.15) $\quad |\eta(\hat{t})| < \frac{\delta_M}{2}$ $\qquad$ für $\hat{t} \in [t_\nu^{(1)}, t_\nu^{(2)}]$.

Mithin gilt:

$$|\tilde{\eta}(\hat{t})| = \left| \frac{\eta(t_\nu^{(2)}) - \eta(t_\nu^{(1)})}{t_\nu^{(2)} - t_\nu^{(1)}} (\hat{t} - t_\nu^{(1)}) + \eta(t_\nu^{(1)}) \right|$$

$$= \left| \eta(t_\nu^{(2)}) \frac{\hat{t} - t_\nu^{(1)}}{t_\nu^{(2)} - t_\nu^{(1)}} + \eta(t_\nu^{(1)}) \frac{t_\nu^{(2)} - \hat{t}}{t_\nu^{(2)} - t_\nu^{(1)}} \right|$$

$$< \frac{\delta_M}{2} \frac{\hat{t} - t_\nu^{(1)}}{t_\nu^{(2)} - t_\nu^{(1)}} + \frac{\delta_M}{2} \frac{t_\nu^{(2)} - \hat{t}}{t_\nu^{(2)} - t_\nu^{(1)}}$$

$$= \frac{\delta_M}{2}$$

Somit gilt:

$$|\tilde{\eta}(\hat{t}) - \eta(\hat{t})| \leq |\tilde{\eta}(\hat{t})| + |\eta(\hat{t})|$$

$$< \frac{\delta_M}{2} + \frac{\delta_M}{2} = \delta_M \quad \text{für } \hat{t} \in [t_\nu^{(1)}, t_\nu^{(2)}] .$$

Beweis von (4):

Es sei o.B.d.A.: $\hat{t} \in [t_\nu^{(1)}, t_\nu^{(2)}]$. Dann existiert wieder $t \in \mathfrak{M}$, so daß

für $|t - \hat{t}| \leq \delta$ gilt $|\dot{\xi}(t) - \dot{\xi}|(\hat{t})| < \frac{\delta_M}{2} < \delta_M$.

Nun gilt $\dot{\xi}(t) = 0$ für $t \in \mathfrak{M}$ (Beweis von (2)) und nach der Definition von $\partial\tilde{\xi}$ ist

$$\partial\tilde{\xi}(\hat{t}) = 0 \quad \text{für } \hat{t} \in [t_\nu^{(1)}, t_\nu^{(2)}]$$

Daraus folgt: $\partial\tilde{\xi}(\hat{t}) = \dot{\xi}(t)$

und damit

④ $\quad |\partial\tilde{\xi}(\hat{t}) - \dot{\xi}(\hat{t})| < \delta_M$.

Beweis von ⑤:

Es sei zunächst $t \in \mathfrak{M}$, dann existiert $((t_i))$ mit $t_i \in M$. $t_i \to t$ und o.B.d.A.: $t_i < t_{i+1}$.

Nach Definition von M und wegen der Stetigkeit von ξ gilt dann:

$$\xi(t_i) = D_j \qquad (i = 1,2\ldots)$$

Da $\dot{\xi}$ existiert und stetig ist, gibt es nach dem Mittelwertsatz τ_i mit:

$$\begin{cases} t_i < \tau_i < t_{i+1} \\ \dot{\xi}(\tau_i) = \dfrac{\xi(t_{i+1}) - \xi(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \end{cases}$$

(Beachte $\tau_i \to t$, $\tau_i < \tau_{i+1}$ für $i = 1,2,\ldots$) .

Mithin gilt: (die Ableitungen existieren)

$$\dot{\eta}(t) = \ddot{\xi}(t) = \lim_{i\to\infty} \frac{\dot{\xi}(\tau_{i+1}) - \dot{\xi}(\tau_i)}{\tau_{i+1} - \tau_i} = 0 .$$

Also $\dot{\eta}(t) = 0$ für $t \in \mathfrak{M}$

Fallunterscheidung:

a) $\mathfrak{M} \cap I_\nu = \{\tilde{t}\}$

Dann kann man (da $\dot{\eta}(\tilde{t}) = 0$ gilt) o.B.d.A. die $t_\nu^{(1)}, t_\nu^{(2)}$ zusätzlich noch so gewählt denken, daß

$$(7.16) \qquad \left| \frac{\eta(t_\nu^{(2)}) - \eta(t_\nu^{(1)})}{t_\nu^{(2)} - t_\nu^{(1)}} \right| < \frac{\delta_M}{2} \quad \text{gilt} .$$

b) Es gebe zwei Punkte $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2$ mit:

$$\tilde{t}_i \in \mathfrak{M} \cap I_\nu \quad (i = 1,2) \quad \text{und} \quad \tilde{t}_1 < \tilde{t}_2 .$$

Es sei $\tilde{t}_1$ minimal und $\tilde{t}_2$ maximal bzgl. I_ν .

Die $t_\nu^{(1)}, t_\nu^{(2)}$ können wir dann wegen $\eta(\tilde{t}_i) = 0$ $(i = 1,2)$ und der

Stetigkeit von η und wegen $\tilde{t}_1 < \tilde{t}_2$ o.B.d.A. zusätzlich so wählen, daß auch wieder (7.16) gilt.
Es sei nun $\hat{t} \in [t_\nu^{(1)}, t_\nu^{(2)}]$

Dann gilt mit passendem $t \in \mathfrak{M}$, mit $|t - \hat{t}| \leq \delta$ folgendes

$$|\partial\tilde{\eta}(\hat{t}) - \dot{\eta}(\hat{t})| \leq |\partial\tilde{\eta}(\hat{t}) - \dot{\eta}(t)| + |\dot{\eta}(t) - \dot{\eta}(\hat{t})|$$
$$= |\partial\tilde{\eta}(\hat{t}) + |\dot{\eta}(t) - \dot{\eta}(\hat{t})| \ .$$

Nach Definition von $\partial\tilde{\eta}$ gilt:

$$|\partial\tilde{\eta}(t)| = \left| \frac{\eta(t_\nu^{(2)}) - \eta(t_\nu^{(1)})}{t_\nu^{(2)} - t_\nu^{(1)}} \right| \qquad \text{für } t \in [t_\nu^{(1)}, t_\nu^{(2)}]$$

$$< \frac{\delta_M}{2} \qquad \text{nach (7.16)}$$

Damit folgt

$$|\partial\tilde{\eta}(\hat{t}) - \dot{\eta}(\hat{t})| \leq |\partial\tilde{\eta}(\hat{t})| + |\dot{\eta}(t) - \dot{\eta}(\hat{t})|$$
$$< \frac{\delta_M}{2} + \frac{\delta_M}{2}$$
$$= \delta_M$$

Also gilt

⑤ $\quad |\partial\tilde{\eta}(\hat{t}) - \dot{\eta}(\hat{t})| < \delta_M \ .$

Damit ist (7.10) vollständig bewiesen. Also gilt Lemma 2 mit $\frac{D_o}{2}$ anstatt D_o für die modifizierte Kurve $\tilde{\gamma}$.

KAPITEL III Der Beweis des umgeformten Beschränktheitsproblems

§ 8 Erster Teil des Beweises (Einige Eigenschaften von $\tilde{\gamma}$)

a) Einige Definitionen auf dem Bogen $E_s E_{s+1}$:

(8.1) Der Bogen $E_s E_{s+1}$ $(s = 1,2,..)$ liegt innerhalb oder außerhalb Σ je nachdem, ob für $t_s \leq t \leq t_{s+1}$ $\max\{|\tilde{\xi}(t)|, |\tilde{\eta}(t)|\} \leq D_3$ oder $\max\{|\tilde{\xi}(t)|, |\tilde{\eta}(t)|\} \geq D_3$ gilt.

Nach dieser Definition liegt jeder gerade $E_s E_{s+1}$ sowohl innerhalb als auch außerhalb Σ, was die wichtige Eigenschaft von $\tilde{\gamma}$ - nämlich jeder Bogen liegt zwischen zwei auf einer Seite liegenden Bögen - ermöglicht.

(8.2) E_s heißt Eintrittspunkt oder Austrittspunkt bzgl. Σ, je nachdem $E_s E_{s+1}$ innerhalb Σ oder $E_s E_{s+1}$ außerhalb Σ liegt.

$$(8.3)\quad \begin{cases} \tilde{X}_s := \sup\{|\tilde{\xi}(t)| \mid t_s \leq t \leq t_{s+1}\} \\ \tilde{Y}_s := \sup\{|\tilde{\eta}(t)| \mid t_s \leq t \leq t_{s+1}\} \end{cases}$$

$$(8.4)\quad \begin{cases} \tilde{w}_s = \tilde{\omega}(t_s) \\ \tilde{\omega}(t_s) := W(\tilde{\xi}(t_s), \tilde{\eta}(t_s), \tilde{\zeta}(t_s)) \end{cases}$$

Wegen der Definition von $\tilde{\xi}$ und $\tilde{\eta}$ folgt:

$$(8.5)\quad \begin{cases} I_s(\tilde{\xi}) := \int_{t_s}^{t_{s+1}} \tilde{\xi}^2(t)\, dt > 0 \\ I_s(\tilde{\eta}) := \int_{t_s}^{t_{s+1}} \tilde{\eta}^2(t)\, dt > 0 \end{cases}$$

b) Die vier folgenden Lemmata beschreiben wichtige Eigenschaften von $\tilde{\gamma}$.

Lemma $\tilde{7}$:

Es gelten für jeden Bogen $E_s E_{s+1}$:

$$(8.6)\quad \tilde{w}_{s+1} - \tilde{w}_s \leq -\frac{D_0}{2}\{I_s(\tilde{\xi}) + I_s(\tilde{\eta})\} + D_1 \int_{t_s}^{t_{s+1}} (|\tilde{\xi}(t)| + |\tilde{\eta}(t)|)\, dt$$

speziell gilt:

$$\begin{cases} \tilde{W}_{s+1} - \tilde{W}_s \leq -\frac{D_2}{2}\{I_s(\tilde{\xi}) + I_s(\tilde{\eta})\} & \text{wenn } \max_{t_s \leq t \leq t_{s+1}} \{|\tilde{\xi}(t)|, |\tilde{\eta}(t)|\} \geq 2D_3 \\ \tilde{W}_{s+1} - \tilde{W}_s < 0 & \text{wenn } \max_{t_s \leq t \leq t_{s+1}} \{|\tilde{\xi}(t)|, |\tilde{\eta}(t)|\} \geq D_3 \end{cases}$$

Beweis:

$\partial\tilde{\omega}$ ist nach Definition auf jedem der Intervalle (t_s, t_{s+1}) stetig und stimmt dort mit $\dot{\tilde{\omega}}$ überein. Da andererseits $\dot{\tilde{\omega}}(t_s + 0)$ und $\dot{\tilde{\omega}}(t_{s+1} - 0)$ existieren und $\tilde{\omega}$ schlechthin stetig ist, so gilt unter Benutzung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\tilde{W}_{s+1} - \tilde{W}_s = \tilde{\omega}(t_{s+1}) - \tilde{\omega}(t_s) = \lim_{\varepsilon \to 0} [\tilde{\omega}(t_{s+1} - \varepsilon) - \tilde{\omega}(t_s + \varepsilon)]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{t_s + \varepsilon}^{t_{s+1} - \varepsilon} \dot{\tilde{\omega}}(t)dt = \int_{t_s}^{t_{s+1}} \partial\tilde{\omega}(t)dt$$

(Man beachte dazu noch, daß sich die durch

$$\Phi_s(t) := \begin{cases} \dot{\tilde{\omega}}(t_s + 0) & \text{für } t = t_s \\ \dot{\tilde{\omega}}(t) & \text{für } t_s < t < t_{s+1} \\ \dot{\tilde{\omega}}(t_{s+1} - 0) & \text{für } t = t_{s+1} \end{cases}$$

auf (t_s, t_{s+1}) definierte und durch stetige Funktion Φ_s von der Einschränkung von $\partial\tilde{\omega}$ auf $[t_s, t_{s+1}]$ höchstens an den Stellen $t = t_s$ und $t = t_{s+1}$ unterscheidet und daher

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{t_s + \varepsilon}^{t_{s+1} - \varepsilon} \dot{\tilde{\omega}}(t)dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{t_s + \varepsilon}^{t_{s+1} - \varepsilon} \Phi_s(t)dt = \int_{t_s}^{t_{s+1}} \Phi_s(t)dt$$

$$= \int_{t_s}^{t_{s+1}} \partial\tilde{\omega}(t)dt \qquad \text{gilt.)}$$

Durch Anwendung von (2.6) und (2.7) folgt leicht die Behauptung.

Lemma 8:

Es sei $\tilde{\chi}_s > D_3$ für den Bogen $\overset{\frown}{E_s E_{s+1}}$, auf dem $\max\{|\tilde{\xi}(t)|, |\tilde{\eta}(t)|\} \geq D_3$ ist. χ sei ein Punkt auf $\overset{\frown}{E_s E_{s+1}}$ mit $|\tilde{\xi}(t_\chi)| = \tilde{\chi}_s$.

Dann existiert T_1, $t_{E_s} \leq T_1 \leq t_{E_{s+1}}$, so daß gilt:

$|\tilde{\xi}(T_1)| \leq 2\, D_3$ und $\tilde{\xi}(t)$ hat konstantes Vorzeichen für $T_1 \leq t \leq t_\chi$.

Außerdem gilt:

$$(8.8)\quad \begin{cases} \text{wenn} & |\tilde{\eta}(T_1)| < D_3\,, \\ \text{dann} & |\tilde{\eta}(t)| \leq \{(a+1)D_3 + 2A_0\}/a, \qquad T_1 \leq t \leq t_\chi. \end{cases}$$

$$(8.9)\quad \begin{cases} \text{wenn} & |\tilde{\eta}(T_1)| \geq D_3, \text{ dann existiert } T_2,\ T_1 \leq t \leq t_\chi \text{ mit:} \\ & |\tilde{\eta}(t)| \geq D_3, \quad T_1 \leq t \leq T_2 \quad \text{und} \\ & |\tilde{\eta}(t)| \leq D_3 + 2A_0/a, \qquad T_2 \leq t \leq t_\chi\,. \end{cases}$$

Beweis:

Für die geradlinigen Kurvenstücke trifft weder im horizontalen noch im vertikalen Fall die Voraussetzung $\tilde{X}_s > D_3$ zu. Damit gilt:

$$\tilde{\xi}(t) \equiv \xi(t),\ \tilde{\eta}(t) \equiv \eta(t) \quad \text{und} \quad \tilde{X}_s \equiv X_s\,.$$

Nun ist die Behauptung gleich der von Lemma 8 bei EZEILO [2] (Seite 108-112), unter Beachtung, daß wegen der Differentialgleichung (1.6)

$$\dot{\zeta}(t) = -f_2(\eta(t)) - f_3(\xi(t)) \qquad t_0 \leq t < +\infty$$

auch $\dot{\zeta}(t) < 0$ gilt,

für die Kurvenpunkte, die im ersten Quadranten liegen.

Bemerkung: Die Abschätzung $\eta_{R_2} - \eta_{R_4} \geq D_3(t_{R_2} - t_{R_4})$ (auf Seite 111) ergibt sich durch die Anwendung des Mittelwertsatzes, da

$$\dot{\eta}(t) \geq D_3, \quad \text{für} \quad t_{R_1} \leq t \leq t_{R_2} \qquad \text{gilt}\,.$$

Lemma 9:

Existieren Werte T_s und t_{M_s} mit

$$|\tilde{\xi}(T_s)| = \tilde{X}_s\,, \quad t_s \leq T_s \leq t_{s+1} \quad \text{und}$$

$$|\tilde{\xi}(t_{M_s})| = \tfrac{1}{2}\tilde{X}_s\,, \quad t_s \leq t_{M_s} \leq t_{s+1}\,,$$

dann existieren t_0' und $\tau_0 > 0$, $\min(t_{M_s}, T_s) \leq t_0' < t_0' + \tau_0 \leq \max(t_{M_s}, T_s)$,

so daß gelten:

(8.10) $|\tilde{\xi}(t)| \geq \frac{1}{2} \tilde{X}_s \qquad t'_o \leq t \leq t'_o + \tau_o$ und

(8.11) $\frac{1}{2} \tilde{X}_s = \left| \int_{t'_o}^{t'_o+\tau_o} \tilde{\eta}(t)\, dt \right| .$

Beweis:

Dieses Lemma wird nur einmal für den Fall $\tilde{X}_s > D_3$ beim Beweis von Lemma $\tilde{12}$ gebraucht. Die geraden Anteile von $\tilde{\gamma}$ fallen nicht unter diese Prämisse. Für die unmodifizierten Anteile von $\tilde{\gamma}$ ist der Beweis von Lemma 9 bei EZEILO [2] (Seite 112-113) gültig.

Lemma $\tilde{10}$:

Es gelte $|\tilde{\eta}(t)| = \frac{1}{2} \tilde{Y}_s$ für ein t, $t_s \leq t \leq t_{s+1}$. Dann existieren $t'_1, \tau_1 > 0$, $t_s \leq t'_1 < t'_1 + \tau_1 \leq t_{s+1}$ so daß gilt:

(8.12) $|\tilde{\eta}(t)| \geq \frac{1}{2} \tilde{Y}_s \qquad t'_1 \leq t \leq t'_1 + \tau_1 ,$

(8.13) $\frac{1}{2} \tilde{Y}_s = \left| \int_{t'_1}^{t'_1+\tau_1} \partial\tilde{\eta}(t)\, dt \right| .$

Beweis:

Die Existenz von t'_1 und τ_1 folgt - für die unmodifizierten Kurvenstücke - sehr ähnlich wie die Existenz von t'_o und τ_o vor Lemma 9.

Für die horizontalen Strecken auf den Geraden $y = \pm D_3$ kann niemals $|\tilde{\eta}(t)| = \frac{1}{2} \tilde{Y}_s$ eintreten.

Für die vertikalen Kurvenstücke gilt das Lemma $\tilde{10}$. unter der zusätzlichen Prämisse $\tilde{Y}_s > D_3$. Nur unter dieser Voraussetzung wird es zum Beweis von Lemma $\tilde{11}$ angewandt. In den weiteren Beweisen wird von Lemma $\tilde{10}$ kein Gebrauch mehr gemacht.

§ 9 Zweiter Teil des Beweises (Abschätzung von $\tilde{W}_{s+1} - \tilde{W}_s$)

Für die Abschätzung von $(\tilde{W}_{s+1} - \tilde{W}_s)$ für die Bögen, die weit außerhalb von Σ liegen, also für die $\max\{\tilde{X}_s, \tilde{Y}_s\}$ groß ist, wird eine Fallunterscheidung gemacht.

Die Abschätzung im Fall $\{\tilde{X}_s \leq d_2;\ \tilde{Y}_s$ groß$\}$ wird in Lemma $\tilde{11}$ durchgeführt. Im Fall $\{\tilde{X}_s$ groß $\}$ wird $(\tilde{W}_{s+1} - \tilde{W}_s)$ durch Lemma $\tilde{12}$ abgeschätzt. Im Lemma $\tilde{14}$ werden beide Fälle kombiniert und eine allgemeine Abschätzung für die außenliegenden Bögen gebracht.

Die Abschätzung von $(\tilde{W}_{s+1} - \tilde{W}_s)$ für die innenliegenden Bögen wird in Lemma $\tilde{13}$ erreicht.

Lemma $\tilde{11}$:

Sei $\max\{|\tilde{\xi}(t)|, |\tilde{\eta}(t)|\} \geq D_3$ für $t_s \leq t \leq t_{s+1}$, und sei $\tilde{X}_s \leq d_2$; $\tilde{Y}_s \geq 2\,D_3$. Dann existiert zu beliebigem $d_3 (> 0)$ eine Konstante $D_8 = D_8(d_2, d_3)$ derart, daß gilt:

(9.1) $\quad \tilde{Y}_s \geq D_8(d_2, d_3) \rightsquigarrow \tilde{W}_{s+1} - \tilde{W}_s \leq -d_3$.

Beweis:

Für die modifizierten Anteile (auf der Berandung) trifft die Prämisse $\tilde{Y}_s (\geq \max\{2\,D_3, D_8(d_2, d_3)\}) \geq 2\,D_3$ nicht zu. Damit kann man den Beweis von Lemma 11 bei EZEILO [2] (Seite 113-114) unverändert übernehmen.

Lemma $\tilde{12}$:

Sei $\max\{|\tilde{\xi}(t)|, |\tilde{\eta}(t)|\} \geq D_3$ für $t_s \leq t \leq t_{s+1}$, und sei $\tilde{X}_s \geq 8\,D_3$. Dann existiert zu beliebigem $d_4 (> 0)$ eine Konstante $D_{10} = D_{10}(d_4)$ derart, daß gilt:

(9.2) $\quad \tilde{X}_s \geq D_{10}(d_4) \rightsquigarrow \tilde{W}_{s+1} - \tilde{W}_s \leq -d_4$.

Beweis:

Auf den geradlinigen Teilen gilt nirgends $\tilde{X}_s > D_3$. Damit ist das Lemma 12 bei EZEILO [2] (Seite 114-116) hier auch gültig.

Lemma $\tilde{13}$:

Es sei $\max\{|\tilde{\xi}(t)|, |\tilde{\eta}(t)|\} \leq D_3$ für $t_s \leq t \leq t_{s+1}$. Dann existiert eine Konstante D_{11} derart, daß gilt:

(9.3) $\tilde{W}_{s+1} - \tilde{W}_s \leq D_{11}$.

Beweis:

Für die nicht geradlinigen Kurvenbögen gilt Lemma 13 bei EZEILO [2] (Seite 116-117).

Für die geraden Strecken gilt $\max\{|\tilde{\xi}(t)|, |\tilde{\eta}(t)|\} = D_3$ für $t_s \leq t \leq t_{s+1}$. Nach Lemma $\tilde{7}$ gilt dann:

$$\tilde{W}_{s+1} - \tilde{W}_s < 0 < D_{11} .$$

Lemma $\tilde{14}$:

Es seien $D_{13} := D_{10}(4\ D_{11})$; $D_{14} := D_8(D_{13}, 4\ D_{11})$, $\max\{|\tilde{\xi}(t)|, |\tilde{\eta}(t)|\} \geq D_3$ für $t_s \leq t \leq t_{s+1}$ und $\max\{\tilde{X}_s, \tilde{Y}_s\}$ so groß, daß der Punkt $(\tilde{X}_s, \tilde{Y}_s)$ außerhalb des Gebietes

$$G := \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq D_{13},\ 0 \leq y \leq D_{14}\}$$

liegt. Dann gilt:

(9.4) $\tilde{W}_{s+1} - \tilde{W}_s \leq -4D_{11}$.

Beweis:

Das Lemma ist eine Kombination von Lemma $\tilde{11}$ (mit $d_2 = D_{13}$, $d_3 = 4\ D_{11}$) und Lemma $\tilde{12}$ (mit $d_4 = 4\ D_{11}$). Siehe den Beweis von Lemma 14 bei EZEILO [2] (Seite 117).

§ 10 Der eigentliche Beweis des Beschränktheitssatzes

a) Reduktion auf die Beschränktheit von $\tilde{W}_s (s \geq s_o)$

Für den noch ausstehenden Beweis von Lemma 5 ist es hinreichend zu zeigen:

(10.1) Es existiert eine Konstante D, so daß gilt:
$\tilde{W}_s \leq D$ für $s \geq s_o$

Beweis:

Angenommen das Lemma 5 wäre falsch, d.h. die Aussage

(10.2) Es existiert eine Konstante $\tilde{D} (> D_3)$, so daß gilt:
$|\tilde{\xi}(t)| \leq \tilde{D}$ und $|\tilde{\eta}(t)| \leq \tilde{D}$ für $t \geq t_{s_o}$.

wäre falsch. Dann gelte:

α) Es gibt eine Teilfolge $((S_i))$ der betrachteten $((S))$ - Folge und hierzu eine Folge $((t^*_{s_i}))$ mit $t_{s_i} \leq t^*_{s_i} \leq t_{s_i+1}$

so daß

$$\lim_{i\to\infty} |\tilde{\xi}(t^*_{s_i})| = +\infty \tag{10.3}$$

oder

β) Es gibt eine Teilfolge $((S_i))$ der betrachteten $((S))$ - Folge und hierzu eine Folge $((t^*_{s_i}))$ mit $t_{s_i} \leq t^*_{s_i} \leq t_{s_i+1}$ so daß

$$\lim_{i\to\infty} |\tilde{\eta}(t^*_{s_i})| = +\infty \tag{10.4}$$

Auf Grund der Definition von $\tilde{\gamma}$ folgt wegen (10.3) und (10.4), daß

$$\tilde{\xi}(t^*_{s_i}) = \xi(t^*_{s_i}) \,,\ \tilde{\eta}(t^*_{s_i}) = \eta(t^*_{s_i}) \text{ und } \tilde{\zeta}(t^*_{s_i}) = \zeta(t^*_{s_i}) \tag{10.5}$$

gilt. Mithin gilt aber auch

$$\tilde{\omega}(t^*_{s_i}) = \omega(t^*_{s_i}) \,. \tag{10.6}$$

Aus (10.3), (10.4), (10.5), Lemma 1 und (10.6) folgt dann:

$$\lim_{i\to\infty} \tilde{\omega}(t^*_{s_i}) = +\infty \,. \tag{10.7}$$

Nun gilt aber nach Lemma $\tilde{2}$ (beachte E_{s_i} Austrittspunkte!), da $t_{s_i} \leq t^*_{s_i}$ daß

$$\tilde{W}_{s_i} = \tilde{\omega}(t_{s_i}) \geq \tilde{\omega}(t^*_{s_i}) \,. \tag{10.8}$$

Damit gilt $\lim_{i\to\infty} \tilde{W}_{s_i} = +\infty$.

Das widerspricht der Annahme (10.1)

b) Vorbereitung zum Beweis der Beschränktheit von $\tilde{W}_s$ $(s \geq s_o)$

Der Beweis von (10.1), und damit die Beschränktheit von $\tilde{W}_s$ $(s \geq s_o)$, ist grundsätzlich abhängig von Lemma $\tilde{13}$, Lemma $\tilde{14}$ und den drei folgenden Resultaten (Lemmata $\tilde{15}$, $\tilde{16}$ und $\tilde{17}$).

Lemma $\tilde{15}$:

Sei $\max\{|\tilde{\xi}(t)|, |\tilde{\eta}(t)|\} \geq D_3$ für $t_s \leq t \leq t_{s+1}$ und sei

$\max\{\tilde{X}_s, \tilde{Y}_s\} > D_3$. Es existiere noch ein t^* mit $\partial\tilde{\eta}(t^*) = 0$ und $t_s \leq t^* \leq t_{s+1}$.
Dann existiert eine Konstante D_{15} mit der Eigenschaft:

$$\tilde{W}_s > D_{15} \rightsquigarrow (\tilde{X}_s, \tilde{Y}_s) \notin G$$

Beweis:

Auf den geradlinigen Teilen gilt nirgends $\max\{\tilde{X}_s, \tilde{Y}_s\} > D_3$.
Damit bleibt der Beweis von Lemma 15 bei EZEILO [2] (Seite 118) überall gültig. Es ist aber nötig zu zeigen, daß

$$\zeta_{E_s} \longrightarrow \infty \quad \text{wenn} \quad W_{E_s} \longrightarrow \infty$$

gilt.

Nach der Definition von W folgt

$$2\,W(x,y,z) = \frac{1}{b}\,x^2 + 4\,ab \int_0^x f_3(\xi)\,d\xi - y^2 +$$

$$+ 4\,b \int_0^y f_2(\eta)\,d\eta + 2\,bz^2 + 2\,xz + 4\,b\,f_3(x)y$$

$$\leq \frac{1}{b}\,x^2 + 4\,ab\,\delta_3' \int_0^x \xi\,d\xi + 4\,b\,\delta_2' \int_0^y \eta\,d\eta +$$

$$+ 2\,bz^2 + 2\,xz + 4\,b\,\delta_3'\,xy$$

Also

$$2W(x,y,z) = \frac{1}{b}\,x^2 + 2\,ab\,\delta_3'\,x^2 + 2\,b\,\delta_2'\,y^2 + 2\,b\,z^2 +$$

$$+ 2\,xz + 4\,b\,\delta_3'\,xy$$

Speziell gilt:

$$2\,W_{E_s} = 2\,W(\xi_{E_s}, \eta_{E_s}, \zeta_{E_s}) < \frac{1}{b}\,D_3^2 + 2\,ab\,\delta_3'\,D_3^2 + 2\,b\,\delta_2'\,D_3^2 +$$

$$+ 2\,D_3\,\zeta_{E_s} + 4\,b\,\delta_3'\,D_3^2 + 2b\,\zeta_{\varepsilon_s}^2$$

$$= \left(\frac{1}{b} + 2\,ab\,\delta_3' + 2\,b\,\delta_2' + 4\,b\,\delta_3'\right) D_3^2 +$$

$$+ 2\,b\,\zeta_{E_s}^2 + 2\,D_3\,\zeta_{E_s}.$$

Daraus folgt die Behauptung $\zeta_{E_s} \longrightarrow \infty$ wenn $W_{E_s} \longrightarrow \infty$.

Lemma 16$^{(\sim)}$:

α) Es seien $E_s E_{s+1}$, $E_{s+1} E_{s+2}$ und $E_{s+2} E_{s+3}$ drei beliebige Glieder der Bogenfolge $(\!(E_1 E_{i+1})\!)$. Es sei
$\max\{|\tilde{\xi}(t)|, |\tilde{\eta}(t)|\} \geq D_3$ für $t_s \leq t \leq t_{s+1}$.
Dann existiert ein t^*, $t_s \leq t^* \leq t_{s+3}$, so daß $\partial\tilde{\eta}(t^*) = 0$.

β) Außerdem gilt speziell: Wenn $\partial\tilde{\eta}(t^*) = 0$, $t_{s+1} \leq t^* \leq t_{s+2}$, dann existiert eine Konstante D_{17} derart, daß gilt:

(10.9) $\quad |\tilde{\zeta}(t)| \leq D_{17}$, für $t_{s+1} \leq t \leq t_{s+2}$.

Beweis:

Für die unmodifizierten Bögen: Siehe EZEILO [2] (Seite 119). Wenn mindestens ein Bogen modifiziert ist, dann folgt durch systematische Untersuchung der verschiedenen Fälle (unter Benutzung von Lemma 6), daß mindestens ein t^* existiert mit $\partial\tilde{\eta}(t^*) = 0$, $t_s \leq t^* \leq t_{s+3}$. Also gilt α).

Für den Beweis von β) im Falle modifizierte Bögen machen wir eine Fallunterscheidung:

β_1) Sei zunächst $E_{s+1} E_{s+2}$ horizontal, dann gilt für $t_{s+1} \leq t \leq t_{s+2}$:

$$\begin{aligned} |\tilde{\zeta}(t)| &= |\zeta(t)| \\ &= |\dot{\eta}(t) + a\eta(t) - P(t)| \\ &\leq |\partial\tilde{\eta}(t)| + |\dot{\eta}(t) - \partial\tilde{\eta}(t)| + a\,|\tilde{\eta}(t)| + \\ &\qquad + a\,|\eta(t) - \tilde{\eta}(t)| + |P(t)| \\ &< 0 + \delta_{M_I} + aD_3 + a\,\delta_{M_I} + A_0 = D. \end{aligned}$$

β_2) Sei nun $E_{s+1} E_{s+2}$ vertikal, dann gilt für $t_{s+1} \leq t \leq t_{E_{s+2}}$

$$\begin{aligned} |\tilde{\zeta}(t)| &= |\zeta(t)| \\ &= |\partial\tilde{\eta}(t)| + |\dot{\eta}(t) - \partial\tilde{\eta}(t)| + a\,|\tilde{\eta}(t)| + \\ &\qquad + a\,|\eta(t) - \tilde{\eta}(t)| + |P(t)| \\ &< \frac{\delta_{M_{II}}}{2} + \delta_{M_{II}} + aD_3 + a\,\delta_{M_{II}} + A_0 = D \end{aligned}$$

Beachte dazu (7.10) und (7.16)!

Aus β_1) und β_2) folgt:

$$|\tilde{\zeta}(t)| \leq D \quad \text{auf jedem modifizierten Bogen .}$$

Lemma (~)17:

Es seien $E_{\theta+i}$ $E_{\theta+i+1}$ $(i = 0,1,2,3)$ vier nacheinander folgende Bögen. Es sei $\max\{|\tilde{\xi}(t)|, |\tilde{\eta}(t)|\} \geq D_3$ für $t_\theta \leq t \leq t_{\theta+1}$. Dann gilt:

α) Wenn die Punkte $(\tilde{X}_j, \tilde{Y}_j)$ $(j = \theta, \theta+2)$ innerhalb des Rechtecks G liegen, dann existiert eine Konstante D_{18} derart, daß gilt:

(10.10) $\qquad \tilde{W}_{\theta+i} \leq D_{18} \qquad (i = 0,1,2,3,4)$

β) Wenn mindestens ein Punkt $(\tilde{X}_j, \tilde{Y}_j)$ $(j = \theta, \theta+2)$ außerhalb des Rechtecks G liegt, dann gilt:

$$\begin{cases} \tilde{W}_{\theta+i} < \tilde{W}_\theta + D_{11} & (i = 1,2,3) \quad (10.11) \\ \tilde{W}_{\theta+4} < \tilde{W}_\theta - 2D_{11} \cdot & (10.12) \end{cases}$$

Beweis:

Für die unmodifizierten Bögen gilt der Beweis von Lemma 17 bei EZEILO [2] (Seite 119-120).
Für die modofizierten Fälle zeigt die Wiederholung der Schlußweise aus Lemma 16, daß auch dann α) richtig ist.
Der Beweis von β) folgt analog auch für die modifizierten Stücke, da er nur von den Lemmata (~)7, (~)13 und (~)14 abhängt.

c) Der Beweis der Beschränktheit von $\tilde{W}_s$ $(s \geq s_o)$

Es sei (o.B.d.A.) $\max\{|\tilde{\xi}(t)|, |\tilde{\eta}(t)|\} \geq D_3$ für $t_{E_1} \leq t \leq t_{E_2}$. Dann sind die Randpunkte $E_1, E_3, \ldots, E_{21-1}, \ldots$ alle Austrittspunkte und die Randpunkte $E_2, E_4, \ldots, E_{21}, \ldots$ alle Eintrittspunkte von $\tilde{\gamma}$ bzgl. Σ .
Wir betrachten die Bogenfolge $((\gamma_j(s_o)))$, $j = 1,2,..$
definiert durch :

(10.13) $\gamma_j(s_o) = E_{s_o+4(j-1)}E_{s_o+4j}$

D.h. die Folge hat die Form:

$$E_{s_o}E_{s_o+4} \quad , \quad E_{s_o+4}E_{s_o+8},\cdots$$

wobei s_o eine beliebige ungerade Zahl ist.

Nach Lemma 17/(10.10), (10.12) gilt:

$$\tilde{W}_{s_o+4} \leq \max\{D_{18}, \tilde{W}_{s_o} - 2D_{11}\} ,$$

$$\tilde{W}_{s_o+8} \leq \max\{D_{18}, \tilde{W}_{s_o+4} - 2D_{11}\}$$

$$\leq \max\{D_{18}, \tilde{W}_{s_o} - 2D_{11}\}$$

$$W_{s_o+4(j-1)} \leq \max\{D_{18}, \tilde{W}_{s_o+4(j-2)} - 2D_{11}\} < \cdots$$

$$\cdots \leq \max\{D_{18}, \tilde{W}_{s_o} - 2D_{11}\}$$

Damit gilt:

(10.14) $$\tilde{W}_{s_o+4(j-1)} \leq \max\{D_{18}, \tilde{W}_{s_o} - 2D_{11}\} \quad (j = 2,3,\ldots)$$

Nach Lemma 17 /(10.10), (10.11) gilt für $i = 1,2,3$

$$\tilde{W}_{s_o+i} \leq \max\{D_{18}, \tilde{W}_{s_o} + D_{11}\} ,$$

$$\tilde{W}_{s_o+4+i} \leq \max\{D_{18}, \tilde{W}_{s_o+4} + D_{11}\}$$

--- $\leq \max$

Also folgt

(10.15) $$\tilde{W}_{s_o+4(j-1)+i} < \max\{D_{18}, \tilde{W}_{s_o+4(j-1)} + D_{11}\}$$

$i = 1,2,3; \quad j = 1,2,3,\ldots)$

für $j = 1$ gilt die letzte Ungleichung trivialerweise.

Nun zeigt man noch, daß aus (10.14) und (10.15) die Aussage

(10.16) $$\tilde{W}_{s_o+k} \leq \max\{D_{18}, \tilde{W}_{s_o}\} + D_{11} \quad (k = 0,1,2,\ldots),$$

d.h.

(10.16) $$\tilde{W}_s < \max\{D_{18}, \tilde{W}_{s_o}\} + D_{11} \quad \text{für} \quad s \geq s_o$$

folgt.

Beweis von (10.16):

Fallunterscheidung:

α) Es sei $D_{18} \geq \tilde{W}_{s_o} - 2D_{11}$:
Dann folgt aus (10.14), daß $\tilde{W}_{s_o+4(j-1)} \leq D_{18}$ gilt $(j > 1)$.

Nach (10.15) gilt dann:

$$\begin{aligned}\tilde{W}_{s_o+4(j-1)+i} &\leq \max\{D_{18},\ D_{18} + D_{11}\} \\ &= D_{18} + D_{11} \\ &\leq \max\{D_{18},\ \tilde{W}_{s_o}\} + D_{11}\ .\end{aligned}$$

β) Nun sei $D_{18} < \tilde{W}_{s_o} - 2D_{11}$:
Dann folgt aus (10.14), daß: $\tilde{W}_{s_o+4(j-1)} \leq \tilde{W}_{s_o} - 2D_{11}$

gilt. Nach (10.15) gilt dann:

$$\begin{aligned}\tilde{W}_{s_o+4(j-1)+i} &\leq \max\{D_{18},\ \tilde{W}_{s_o} - 2D_{11} + D_{11}\} \\ &= \max\{D_{18},\ \tilde{W}_{s_o} - D_{11}\} \\ &= \tilde{W}_{s_o} - D_{11} \\ &< \tilde{W}_{s_o} + D_{11} \\ &< \max\{D_{18},\ \tilde{W}_{s_o}\} + D_{11}\end{aligned}$$

Aus α) und β) gilt stets:

(10.17) $$\tilde{W}_{s_o+4(j-1)+i} \leq \max\{D_{18},\ \tilde{W}_{s_o}\} + D_{11}$$

für $i = 1,2,3$ und $j = 2,3,\ldots$

Für $j = 1$ gilt (10.17) auch nach (10.10) und (10.11) .
Es bleibt noch zu zeigen, daß (10.17) auch für $i = 0$ gültig ist; damit $\{4(j-1)+i\}$ alle natürlichen Zahlen durchläuft. Das folgt aber trivialerweise aus (10.15).

Aus (10.17) (incl. für $j = 1$, $i = 0$) ergibt sich dann:

(10.16) $$\tilde{W}_{s_o+k} \leq \max\{D_{18},\ \tilde{W}_{s_o}\} + D_{11} \quad \text{für} \quad k = 1,2,\ldots$$

Da $\tilde{W}_{s_o} < \max\{D_{18}, \tilde{W}_{s_o}\} + D_{11}$, so folgt

$$\tilde{W}_{s_o+k} \leq \max\{D_{18}, \tilde{W}_{s_o}\} + D_{11} \quad \text{für } k = 0,1,2,\ldots$$

d.h.

$$\tilde{W}_s \leq \max\{D_{18}, \tilde{W}_{s_o}\} + D_{11} \quad \text{für } s \geq s_o \,. \tag{10.16}$$

Nun genügt es, für den Beweis von (10.1) zu zeigen:

(10.18) Es gibt eine ungerade natürliche Zahl s_o, für die $\tilde{W}_{s_o}$ unabhängig von den Anfangsdaten der Lösung, beschränkt ist.

Daraus folgt, daß:

$$\tilde{W}_s \leq D \qquad \text{für } s \geq s_o,$$

und damit ist Lemma 5 bewiesen. Daraus resultiert die gewünschte globale Beschränktheit der Lösungen und ihrer ersten beiden Ableitungen unserer Ausgangsdifferentialgleichung.

Beweis von (10.18):

Wir betrachten die Bogenfolge $(\!(\gamma_j(1))\!)$, $j = 1,2,\ldots$, also die Folge E_1E_5, E_5E_9,...
Da jeder Randpunkt mit geradem Index Eintrittspunkt von $\tilde{\gamma}$ bzgl. Σ ist, liegt der Bogen $E_{4j-2}\,E_{4j-1}$ innerhalb von Σ, d.h.

$$\max\{|\tilde{\xi}(t)|, |\tilde{\eta}(t)|\} \leq D_3 \quad \text{für } t_{E_{4j-2}} \leq t \leq t_{E_{4j-1}} \,. \tag{10.19}$$

Andererseits ist $\max\{|\tilde{\xi}(t)|, |\tilde{\eta}(t)|\} \geq D_3$ auf den Bögen $E_{4j-3}\,E_{4j-2}$ und $E_{4j-1}\,E_{4j}$, die auf beiden Seiten von $E_{4j-2}\,E_{4j-1}$ liegen.
Für die ersten N Glieder der Bogenfolge $(\!(\gamma_j(1))\!)$ wird nun eine Fallunterscheidung gemacht, wobei N eine beliebige (im folgenden feste) Zahl ist.

Fall α) Es existiert ein j, $1 \leq j \leq N$, so daß gilt:

$\tilde{W}_s \leq D_{15}$ auf mindestens einen Austrittspunkt von $\tilde{\gamma}_j(1)$

Dann folgt trivialerweise (10.18), da jeder Austrittspunkt von $\tilde{\gamma}$ ungeraden Index hat.

Fall β) $\partial\tilde{\eta}(t) = 0$ in einem Punkt des Bogens $E_{4j-2}\,E_{4j-1}$, für mindestens ein $j(1 \leq j \leq N)$.

Es gelte $\partial\tilde{\eta}(t) = 0$ an einer Stelle des Bogens $E_{4j_o-2}\,E_{4j_o-1}$, wobei $1 \leq j_o \leq N$. Dann folgt nach (10.19) und Anwendung von Lemma $\tilde{16}$ (10.9), daß

$$|\tilde{\zeta}(t)| \leq D_{17} \qquad \text{für} \quad t_{E_{4j_o-2}} \leq t \leq t_{E_{4j_o-1}}$$

gilt. Daraus folgt

$$\tilde{W}_{4j_o-1} \leq \max\{W(\tilde{\xi},\tilde{\eta},\tilde{\zeta}) \mid |\tilde{\xi}| \leq D_3,\ |\tilde{\eta}| \leq D_3,\ |\tilde{\zeta}| \leq D_{17}\}$$

Damit gilt (10.18) für $s_o = 4j_o-1$.

Fall γ) Es gelte weder α) noch β).

D.h. es gelten:

(10.20) { Für jedes $j(1 \leq j \leq N)$ ist $\tilde{W}_s > D_{15}$ auf jeden Austrittspunkt von $\tilde{\gamma}_j(1)$.

und

(10.21) { Für jedes j $(1 \leq j \leq N)$ ist $\partial\tilde{\eta}(t) \neq 0$ auf den Bogen $E_{4j-2}\,E_{4j-1}$.

Aus (10.21) und Lemma $\tilde{16}$ folgt:

$\tilde{\eta}(t) = 0$ an einer Stelle auf $E_{4j-3}\,E_{4j-2}$ oder $E_{4j-1}\,E_{4j}$.

Aber nach (10.20) und Lemma $\tilde{15}$ folgt, daß $(\tilde{X}_{4j-3}, \tilde{Y}_{4j-3})$ oder $(\tilde{X}_{4j-1}, \tilde{Y}_{4j-1})$ außerhalb des Rechtecks G liegen muß.

Nun gilt nach Lemma $\tilde{17}$ (10.12)

$$\tilde{W}_{4j+1} - \tilde{W}_{4j-3} < -2D_{11}$$

für jedes j $(1 \leq j \leq N)$.

Daraus folgt:

$$\sum_{j=1}^{N} (\tilde{W}_{4j+1} - \tilde{W}_{4j-3}) < -2ND_{11}$$

Also: $\tilde{W}_{4N+1} < W_1 - 2\,N\,D_{11}$

Für genügend großes N gilt:

$$\tilde{W}_{4N+1} \leqq D_{15}$$

Damit gilt (10.18), da $4N+1$ immer ungerade ist.

Durch α), β) und γ) ist die Aussage (10.18) bewiesen, was nur übrig zu zeigen war.

Einige Bemerkungen zur Methode des Beweises

α) Die Methode des Beweises läßt sich für viele andere nichtlineare Differentialgleichungen anwenden, wenn sie die "ROUTH-HURWITZ" Bedingungen erfüllen, und wenn eine Energiefunktion (LYAPUNOW-Funktion) - die den fundamentalen Abschätzungen (Lemma 1 und Lemma 2) genügt - gefunden werden kann.

Es scheint z.B. möglich, unsere Arbeit auf die Differentialgleichung

(1) $$\dddot{x} + f_1(\dot{x})\ddot{x} + f_2(\dot{x}) + f_3(x) = p(t)$$

zu erweitern.
Wahrscheinlich ist auch unser Beweisverfahren für die allgemeine Differentialgleichung

(2) $$\dddot{x} + f_1(x,\dot{x})\ddot{x} + f_2(\dot{x}) + f_3(x) = p(t)$$

durchführbar, wenn wir das äquivalente Differentialgleichungssystem

$$(\tilde{2}) \qquad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z - f_1(x,y)y + P(t) \\ \dot{z} = f_1(x,y)y - f_2(y) - f_3(x) \end{cases}$$

betrachten.

β) In Analogie zu EZEILO [3] kann man für die noch allgemeinere Differentialgleichung

(3) $$\dddot{x} + f_1(x,\dot{x})\ddot{x} + f_2(\dot{x}) + f_3(x) = p(t,x,\dot{x},\ddot{x})$$

mit den Voraussetzungen:

(i) $f_1(x,y) \geq \delta_1 > 0$; $f_2(y) \geq \delta_2 y > 0$ $(\delta_2 > 0)$

(ii) $f_3(x) \geq \delta_0 x > 0$ $(\delta_0 > 0)$; $f_3'(x) \leq \delta_3 < \delta_1\delta_2$

(iii) $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ existiert, $y\frac{\partial f_1}{\partial x} \leq \delta_4$ mit $0 < \delta_4 < (\delta_1\delta_2 - \delta_3)\delta_1^{-1}$

(iv) $|p(t,x,y,z)| \leq A_0 < \infty$

(v) $f_2(0) = 0 = f_3(0)$

die globale Beschränktheit der Lösungen und ihrer ersten beiden Ableitungen zeigen.

Dazu betrachten wir das äquivalente Differentialgleichungssystem

$$(\tilde{3}) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -f_1(x,y)z - f_2(y) - f_3(x) + p(t,x,y,z) \end{aligned}$$

Die LYAPUNOW-Funktion $V = V(x,y,z)$ sei so definiert:

$$2V(x,y,z) = 2\int_0^x f_3(\xi)\,d\xi + 2\delta\int_0^y f_2(\eta)\,d\eta + \delta z^2 + 2\int_0^y \eta f_1(x,\eta)\,d\eta + 2yz + 2\delta f_3(x)y$$

wobei δ so gesucht sei, daß

$$\frac{1}{\delta_1} < \delta < \frac{\delta_2 - \delta_4}{\delta_3}$$

gilt, was wegen $\delta_4 < \delta_2 - \delta_3\delta_1^{-1}$ (aus iii) möglich ist.

Nun zeigen wir, daß die Funktion $V(x,y,z)$ den fundamentalen Abschätzungen (2,3) und (2.6) genügt, also

① $V(x,y,z) \geq 0 \qquad V(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

② $\dot{V}(x,y,z) \leq -D_0(y^2+z^2) + D_1(|y| + |z|) \qquad V(x,y,z) \in \gamma$

Beweis von (1) :

$$2\,V(x,y,z) = 2\int_0^x f_3(\xi)\,d\xi + 2\,\delta\int_0^y f_2(\eta)\,d\eta + \delta z^2$$

$$+ 2\int_0^y \eta\, f_1(x,\eta)\,d\eta + 2\,yz + 2\,\delta\, f_3(x)y$$

$$= (\delta z^2 + 2yz + \delta^{-1}y^2) + (2\int_0^y \eta\, f_1(x,\eta)\,d\eta - \delta^{-1}y^2)$$

$$+ (2\int_0^x f_3(\xi)\,d\xi + 2\,\delta\, f_3(x)y + 2\,\delta\int_0^y f_2(\eta)\,d\eta)$$

$$\geq \delta^{-1}(\delta z + y)^2 + (\delta_1 - \delta^{-1})y^2$$

$$+ \delta_0 x^2 + 2\,\delta\delta_0 xy + \delta\delta_2 y^2$$

$$= \delta^{-1}(\delta z + y)^2 + (\delta_1 - \delta^{-1})y^2$$

$$+ \delta_0(x^2 + 2\,\delta xy + \frac{\delta\delta_2}{\delta_0}\,y^2)$$

nach (ii) $f_3(x) \geq \delta_0 x$ und $f_3(x) \leqq \delta_3 x$

$\curvearrowright\ \delta_0 \leqq \delta_3 \curvearrowright\ \frac{1}{\delta_0} \geq \frac{1}{\delta_3}$

Da $\delta < (\delta_2 - \delta_4)\,\frac{1}{\delta_3} \curvearrowright \frac{1}{\delta_0} > \frac{\delta}{\delta_2 - \delta_4} > \frac{\delta}{\delta_2}$

Daraus folgt

$$2\,V(x,y,z) \geq \delta^{-1}(\delta z + y)^2 + (\delta_1 - \delta^{-1})y^2$$
$$+ \delta_0(x^2 + 2\,\delta xy + \delta^2 y^2)$$

$$= \delta^{-1}(\delta z + y)^2 + (\delta_1 - \tfrac{1}{\delta})y^2 + \delta_0(x + \delta y)^2$$

Da $\delta_1 > \frac{1}{\delta}$ folgt:

$V(x,y,z)) \geq 0 \qquad V(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

Beweis von (2) :

$$\dot{V}(x,y,z) = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\dot{z}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = f_3(x) + \int_0^y \eta \frac{\partial f_1(x,\eta)}{\partial x} d\eta + \delta f_3'(x)y$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \delta f_2(y) + y f_1(x,y) + z + \delta f_3(x)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \delta z + y$$

$$\dot{V}(x,y,z) = \{f_3(x) + \int_0^y \eta \frac{\partial f_1}{\partial x} d\eta + \delta f_3'(x)y\}y$$

$$+ \{\delta f_2(y) + y f_1(x,y) + z + \delta f_3(x)\}z$$

$$+ \{\delta z + y\}\{- f_1(x,y)z - f_2(y) - f_3(x) + p(t,x,y,z)\}$$

Da $y\frac{\partial f_1}{\partial x} \leq \delta_4$ (aus iii) ist, dann folgt

$$\dot{V}(x,y,z) \leq f_3(x)y + \delta_4 y^2 + \delta f_3'(x)y^2$$

$$+ \delta f_2(y)z + f_1(x,y)yz + z^2 + \delta f_3(x)z$$

$$- \delta f_1(x,y)z^2 - \delta f_2(y)z - \delta f_3(x)z + \delta z\, p(t,x,y,z)$$

$$- f_1(x,y)yz - f_2(y)y - f_3(x)y + p(t,x,y,z)y$$

$$= - \{f_2(y)y - \delta_4 y^2 - \delta f_3'(x)y^2\}$$

$$- \{\delta f_1(x,y)z^2 - z^2\}$$

$$+ \{\delta z + y\}\, p(t,x,y,z)$$

Da: $f_2(y) \geq \delta_2 y$ aus (i)

$f_3'(x) \leq \delta_3$ aus (ii)

$f_1(x,y) \geq \delta_1$ aus (i)

$|p(t,x,y,z)| \leq A_o$ aus (iv)

$$\rightsquigarrow \dot{V}(x,y,z) \leq -\{\delta_2 y^2 - \delta_4 y^2 - \delta\delta_3 y^2\} - \{\delta\delta_1 z^2 - z^2\}$$
$$+ \{\delta\,|z| + |y|\}\,A_0$$
$$= -(\delta_2 - \delta_4 - \delta\delta_3)y^2 - (\delta\delta_1 - 1)z^2$$
$$+ \{\delta\,|z| + |y|\}\,A_0$$

Da $\frac{1}{\delta_1} < \delta < \frac{\delta_2 - \delta_4}{\delta_3}$ $\rightsquigarrow \delta\delta_1 - 1 > 0$ und $\delta_2 - \delta_4 - \delta\delta_3 > 0$

$\rightsquigarrow$ Es existieren positive Konstanten D_0, D_1 so daß gilt:

$\dot{V}(x,y,z) \leq -D_0(y^2 + z^2) + D_1(|y| + |z|)$ $\quad V(x,y,z) \in \gamma$

Der Verfasser hofft, bald einen ausführlichen Beweis für die globale Beschränktheit der Lösungen der Differentialgleichung (3) geben zu können.

Berlin, den 27.11.1967

Literatur

[1] EZEILO, J.O.C.: On the boundedness of solutions of a certain differential equation of the third-order, Proc.Lond.Math.Soc.(3) 9 (1959), 74-114

[2] ——— A boundedness theorem for a certain third-order differential equation, Proc.Lond.Math.Soc.(3) 13 (1963),99-124

[3] ——— A boundedness theorem for a differential equation of the third-order, Izdat.Akad.Nauk Ukrain.SSR,Kiev (1963) 513-538

[4] - Corrigendum to [2], Proc.Lond.Math.Soc.(3) 17 (1967) 382-384

[5] LEFSCHETZ, S.: Differential equations: Geometric theory (New York 1957)

[6] LEVINSON,N./ CODDINGTON,E.: Theory of differential equations (New York 1955)

[7] REISSIG,R./SANSONE, G./ CONTI, R.: Qualitative Theorie nichtlinearer Differentialgleichungen (Roma 1963)

L E B E N S L A U F

Name: Ahmed Abou El - Ela

Geboren: 29. März 1938 in Suez/V.A.R.

Besucht

Grundschule von Oktober 1943 bis Juni 1949
Oberschule von Oktober 1949 bis Juni 1954
Lehrer-Ausbildungs-Fakultät von Oktober 1954 bis Juni 1958

Die Abschlußprüfung der Lehrer-Ausbildungs-Fakultät von Kairo B.Sc. Fach Mathematik - Ägyptisches Staatsexamen - habe ich im Juni 1958 mit der Note "sehr gut" abgelegt.

Gearbeitet als

Lehrer für Mathematik an der Oberschule in Suez von Oktober 1958 bis 1960

Wissenschaftlicher Assistent an der Lehrer-Ausbildungs-Fakultät in Assiut von Oktober 1960 bis 1961

Seit 15. Mai 1962 immatrikuliert an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Freien Universität Berlin, Fachrichtung Mathematik.

Diplom-Vorprüfung am 14. Mai 1964 mit "sehr gut" bestanden

Diplomarbeit über "Nicht-Lineare Differentialgleichungen" im Wintersemester 1965/66 (nicht veröffentlicht)

Dissertation über "Nicht-Lineare Differentialgleichungen" im Wintersemester 1967/68

Druck: Dissertationsdruckstelle, 1 Berlin 33